

電磁場の波動方程式

渡邊 俊夫

概要

電荷密度 ρ の電荷と電流密度 j の電流が存在するとき、電束密度 D 、磁束密度 B 、電場 E 、磁場 H の間に、次のマクスウェル方程式が成り立つ。

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

本稿では、これらのマクスウェル方程式から電磁波の方程式を導く。

まず、 $\rho = 0, j = 0$ であり、 ε を誘電率、 μ を透磁率として、 $D = \varepsilon E, B = \mu H$ が成り立つ場合を考える。

次に、 $\rho \neq 0, j \neq 0$ の場合を考える。

そして、 P を分極、 M を磁化として、 $D = \varepsilon_0 E + P, B = \mu_0 (H + M)$ の場合を考える。

マクスウェル方程式①

電荷密度 $\rho = 0$, 電流密度 $j = 0$ であり、 ε を誘電率、 μ を透磁率として、 $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$ が成り立つ場合、マクスウェル方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

ここで、 ε と μ は場所と時間によらないと仮定している。

電場の波動方程式①

ベクトル解析の恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$ を用いると

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

だから

$$\nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) = -\mu \nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

より

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

ここで、 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ とおくと

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

これは電場 $\boldsymbol{E}$ の波動方程式であり、 c は位相速度である。

磁場の波動方程式①

同様に、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$$

および

$$\nabla \times \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

より

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

であるから

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

したがって、磁場 $\mathbf{H}$ も電場 $\mathbf{E}$ と同じ波動方程式を満たし、位相速度は c である。

複素電磁場

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

に対して、媒質のインピーダンス $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ を用いて

$$\Phi = \mathbf{E} + iZ\mathbf{H}$$

で複素電磁場を定義すると

$$\begin{aligned}\nabla \times \Phi &= \nabla \times (\mathbf{E} + iZ\mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + iZ\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{Z}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + iZ\mathbf{H}) = \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\end{aligned}$$

が成り立つ。

複素電磁場の波動方程式①

$$\nabla \cdot \Phi = \nabla \cdot (E + iZH) = \nabla \cdot E + iZ\nabla \cdot H = 0$$

だから

$$\nabla \times (\nabla \times \Phi) = \nabla(\nabla \cdot \Phi) - \nabla^2 \Phi = -\nabla^2 \Phi$$

であり、

$$\nabla \times \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{i}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \Phi) = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

より

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

これは複素電磁場 Φ の波動方程式であり、位相速度は c である。

マクスウェル方程式②

電荷密度 $\rho \neq 0$, 電流密度 $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ であり、 ε を誘電率、 μ を透磁率として、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ が成り立つ場合、マクスウェル方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ここで、 ε と μ は場所と時間によらないと仮定している。

電場の波動方程式②

ベクトル解析の恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$ を用いると

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

だから

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) &= -\mu \nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

より

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}$$

これは電場 $\boldsymbol{E}$ の波動方程式であり、右辺は波源を表している。

磁場の波動方程式②

同様に、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$$

および

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= \nabla \times \mathbf{j} + \varepsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \times \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \nabla \times \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \nabla \times \mathbf{j} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

より

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{j}$$

これは磁場 $\mathbf{H}$ の波動方程式であり、右辺は波源を表している。

複素電磁場の波動方程式②

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{j}$$

に対して、複素電磁場 $\Phi = \mathbf{E} + iZ\mathbf{H}$ を用いると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - iZ \nabla \times \mathbf{j} = Zc \nabla \rho + \frac{Z}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - iZ \nabla \times \mathbf{j} \\ &= Z \left(c \nabla \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - i \nabla \times \mathbf{j} \right) \end{aligned}$$

これは複素電磁場 Φ の波動方程式であり、右辺は波源を表している。

マクスウェル方程式③

一般に、電束密度 D は真空の誘電率を ε_0 、分極を P として、 $D = \varepsilon_0 E + P$ で表される。
また、磁束密度 B は真空の透磁率を μ_0 、磁化を M として、 $B = \mu_0(H + M)$ で表される。
電荷密度 $\rho \neq 0$, 電流密度 $j \neq 0$ の場合、マクスウェル方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

電場の波動方程式③

ベクトル解析の恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ を用いると

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) \right) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times (\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})) \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \nabla \times \mathbf{M} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}) - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

電場の波動方程式③

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

より

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)$$

ここで、 $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ とおくと

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 c_0^2 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ &= \mu_0 \left(c_0^2 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \right) \end{aligned}$$

これが一般の場合の電場 $\mathbf{E}$ の波動方程式であり、右辺は波源を表している。

磁場の波動方程式③

同様に、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \left(\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \right) - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla^2 \mathbf{H}$$

および

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) &= \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \right) = \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})) \\ &= \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

磁場の波動方程式③

$$= \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}$$

より

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}$$

これが一般の場合の磁場 $\mathbf{H}$ の波動方程式であり、右辺は波源を表している。

複素電磁場の波動方程式③

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left(c_0^2 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}$$

に対して、複素電磁場 $\Phi = \mathbf{E} + i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H} = \mathbf{E} + iZ_0 \mathbf{H}$ を用いると

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \mu_0 \left(c_0^2 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \right) \\ &\quad - iZ_0 \left(\nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

複素電磁場の波動方程式③

$$\begin{aligned} &= \frac{Z_0}{c_0} \left(c_0^2 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \right) \\ &\quad - iZ_0 \left(\nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} \right) \\ &= Z_0 \left(c_0 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_0} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. - i \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) - i \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \frac{i}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} \right) \\ &= Z_0 \left(c_0 \nabla \left(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{i}{c_0} \nabla \cdot \mathbf{M} \right) + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{i}{c_0} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. - i \nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{i}{c_0} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) \right) \end{aligned}$$

複素電磁場の波動方程式③

したがって

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Z_0 \left(c_0 \nabla \tilde{\rho} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{j}}}{\partial t} - i \nabla \times \tilde{\mathbf{j}} \right)$$

これが一般の場合の複素電磁場 Φ の波動方程式であり、右辺は波源を表している。
ここで、

$$\tilde{\rho} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{i}{c_0} \nabla \cdot \mathbf{M} = \rho - \nabla \cdot \left(\mathbf{P} + \frac{i}{c_0} \mathbf{M} \right)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{i}{c_0} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{P} + \frac{i}{c_0} \mathbf{M} \right)$$

である。

まとめ①

電荷密度 $\rho = 0$, 電流密度 $j = 0$ であり、 ε を誘電率、 μ を透磁率として、 $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$ が成り立つ場合、電場 E と磁場 H の波動方程式は $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ として

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

である。これは複素電磁場 $\Phi = E + i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H = E + iZH$ を用いて

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

と表せる。

まとめ②

電荷密度 $\rho \neq 0$, 電流密度 $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ であり、 ε を誘電率、 μ を透磁率として、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ が成り立つ場合、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ の波動方程式は $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ として

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{j}$$

である。これは複素電磁場 $\Phi = \mathbf{E} + i \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} = \mathbf{E} + iZ\mathbf{H}$ を用いて

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Z \left(c \nabla \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - i \nabla \times \mathbf{j} \right)$$

と表せる。

まとめ③

電荷密度 $\rho \neq 0$, 電流密度 $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ の場合、真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 、分極を $\mathbf{P}$ 、磁化を $\mathbf{M}$ とすると、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ の波動方程式は $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ として

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left(c_0^2 \nabla(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}$$

である。これは複素電磁場 $\Phi = \mathbf{E} + i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{H} = \mathbf{E} + iZ_0 \mathbf{H}$ を用いて

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Z_0 \left(c_0 \nabla \tilde{\rho} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \tilde{\mathbf{j}}}{\partial t} - i \nabla \times \tilde{\mathbf{j}} \right)$$

と表せる。

まとめ③

ここで、

$$\tilde{\rho} = \rho - \nabla \cdot \left(\mathbf{P} + \frac{i}{c_0} \mathbf{M} \right)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{P} + \frac{i}{c_0} \mathbf{M} \right)$$

である。

参考文献

- 三好 旦六「光・電磁波論」培風館、1987
- 太田 浩一「マクスウェル理論の基礎 相対論と電磁気学」東京大学出版会、2002
- 左貝 潤一「電気系のための光工学 一回路理論に基づいて」共立出版、2022

付録: 恒等式の証明

ベクトル解析の恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ は、次のように証明できる。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

より

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right\} \mathbf{i} \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right\} \mathbf{j} \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \right\} \mathbf{k} \end{aligned}$$

付録: 恒等式の証明

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right\} \mathbf{i} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right\} \mathbf{j} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} \right\} \mathbf{k} \\
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{i} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{j} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} \right) \right\} \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

偏微分の順序の入れ替え

付録: 恒等式の証明

青字の項の順序の
入れ替え

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{i}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{j}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} \right) \right\} \mathbf{k}$$

赤字の項の追加

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{i}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{j}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right) \right\} \mathbf{k}$$

付録: 恒等式の証明

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_x \right\} \mathbf{i} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_y \right\} \mathbf{j} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_z \right\} \mathbf{k} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_x \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_y \right\} \mathbf{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_z \right\} \mathbf{k} \\ &= \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right\} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \end{aligned}$$