

電磁波の減衰定数

—誘電率、透磁率を用いた表式—

渡邊 俊夫

誘電率、透磁率と屈折率

真空中において、電磁波の波長を λ 、周波数を f 、位相速度を c とすると、 $f\lambda = c$ の関係が成り立ち、波数は $k = 2\pi/\lambda$ 、角周波数は $\omega = 2\pi f$ だから

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$$

となる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率であり、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ である。
媒質中では、**誘電率**を ϵ 、**透磁率**を μ とすると、電磁波の位相速度は $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ になるから、その波数は

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\epsilon_r\mu_r} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{c} = \frac{\omega n}{c}$$

となる。ここで、 $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ は媒質の比誘電率、 $\mu_r = \mu/\mu_0$ は媒質の比透磁率であり、

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$$

は媒質の**屈折率**である。

減衰定数、伝搬定数

電磁波の進行方向を z 軸にとり、その位置と時間依存性を $e^{i(\omega t - kz)}$ と表す。
このとき、波数を

$$\tilde{k} = \beta - i\alpha$$

と複素表示すると、電磁波の位置と時間依存性は

$$e^{i(\omega t - kz)} = e^{i(\omega t - (\beta - i\alpha)z)} = e^{i(\omega t - \beta z) - \alpha z} = e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

となる。これは、電磁波が z 方向に伝搬するにつれて、その振幅が $e^{-\alpha z}$ にしたがって減衰することを表す。ここで、 α を**減衰定数**、 β を**伝搬定数**という。

電磁波の位置と時間依存性を $e^{i(\omega t - kz)}$ と表した場合、 $\alpha > 0$ のときに振幅が減衰するためには波数の複素表示を $\tilde{k} = \beta - i\alpha$ として、虚部を負にする必要がある。これに伴って、複素屈折率も $\tilde{n} = n' - in''$ と虚部が負になる(複素誘電率、複素透磁率も同様である)。

これに対して、電磁波の位置と時間依存性を $e^{i(kz - \omega t)}$ と表した場合には、 $\alpha > 0$ のときに振幅が減衰するような波数の複素表示は $\tilde{k} = \beta + i\alpha$ となり、複素屈折率も $\tilde{n} = n' + in''$ となる。

複素屈折率と複素誘電率、複素透磁率

波数 k を複素表示すると、 $k = \omega n/c$ より、屈折率 n は複素数になる。そこで、媒質の複素屈折率を $\tilde{n} = n' - in''$ と表す。さらに、 $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ より、誘電率と透磁率も複素数になる。媒質の複素誘電率を

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon_r' - i\epsilon_r'') = \epsilon_0\tilde{\epsilon}_r$$

とし、複素透磁率を

$$\tilde{\mu} = \mu' - i\mu'' = \mu_0(\mu_r' - i\mu_r'') = \mu_0\tilde{\mu}_r$$

とすると、

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}_r \tilde{\mu}_r = (\epsilon_r' - i\epsilon_r'')(\mu_r' - i\mu_r'') = (\epsilon_r' \mu_r' - \epsilon_r'' \mu_r'') - i(\epsilon_r' \mu_r'' + \epsilon_r'' \mu_r')$$

であり、これを $\tilde{n}^2 = u' - iu''$ とする。いっぽう、 $\tilde{n} = n' - in''$ より

$$\tilde{n}^2 = (n' - in'')^2 = (n'^2 - n''^2) - i2n'n''$$

だから、次の関係が成り立つ。

$$u' = n'^2 - n''^2, \quad u'' = 2n'n''$$

複素屈折率 $\tilde{n} = n' - in''$ の虚部 n'' を消衰係数という。

複素屈折率の実部

$$u' = n'^2 - n''^2, \quad u'' = 2n'n''$$

から、複素屈折率の虚部 n'' を消去して実部 n' について解くと

$$u' = n'^2 - \left(\frac{u''}{2n'}\right)^2 = n'^2 - \frac{u''^2}{4n'^2}$$

$$4n'^4 - 4u'n'^2 = u''^2$$

$$(2n'^2 - u')^2 = u'^2 + u''^2$$

$$2n'^2 - u' = \pm\sqrt{u'^2 + u''^2}$$

$$n'^2 = \frac{u' \pm \sqrt{u'^2 + u''^2}}{2}$$

ここで、 $n'^2 \geq 0$ だから、正号をとって

$$n'^2 = \frac{u' + \sqrt{u'^2 + u''^2}}{2}$$

複素屈折率の虚部

複素屈折率の実部が

$$n'^2 = \frac{u' + \sqrt{u'^2 + u''^2}}{2}$$

と表されることより、虚部は

$$n''^2 = n'^2 - u' = \frac{-u' + \sqrt{u'^2 + u''^2}}{2}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} u'^2 + u''^2 &= (\varepsilon_r' \mu_r' - \varepsilon_r'' \mu_r'')^2 + (\varepsilon_r' \mu_r'' + \varepsilon_r'' \mu_r')^2 \\ &= (\varepsilon_r' \mu_r')^2 + (\varepsilon_r'' \mu_r'')^2 + (\varepsilon_r' \mu_r'')^2 + (\varepsilon_r'' \mu_r')^2 \\ &= (\varepsilon_r' \mu_r')^2 + (\varepsilon_r' \mu_r'')^2 + (\varepsilon_r'' \mu_r')^2 + (\varepsilon_r'' \mu_r'')^2 \\ &= (\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2)(\mu_r'^2 + \mu_r''^2) \\ &= |\tilde{\varepsilon}_r|^2 |\widetilde{\mu}_r|^2 = |\tilde{\varepsilon}_r \widetilde{\mu}_r|^2 \end{aligned}$$

減衰定数と比誘電率、比透磁率

$$\tilde{k} = \frac{\omega \tilde{n}}{c} = \frac{\omega(n' - in'')}{c} = \beta - i\alpha$$

より、伝搬定数 β と減衰定数 α は、比誘電率と比透磁率を用いて次式で表される。

$$\beta = \frac{\omega n'}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{u' + \sqrt{u'^2 + u''^2}}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\omega n''}{c} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-u' + \sqrt{u'^2 + u''^2}}{2}}$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{(\epsilon_r'' \mu_r'' - \epsilon_r' \mu_r') + \sqrt{(\epsilon_r' \mu_r' - \epsilon_r'' \mu_r'')^2 + (\epsilon_r' \mu_r'' + \epsilon_r'' \mu_r')^2}}$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{(\epsilon_r'' \mu_r'' - \epsilon_r' \mu_r') + \sqrt{(\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2)(\mu_r'^2 + \mu_r''^2)}}$$

減衰定数と誘電正接、透磁正接

減衰定数 α は、誘電正接 $\tan \delta_\varepsilon = \varepsilon_r''/\varepsilon_r'$ と透磁正接 $\tan \delta_\mu = \mu_r''/\mu_r'$ を用いて次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{(\varepsilon_r''\mu_r'' - \varepsilon_r'\mu_r') + \sqrt{(\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2)(\mu_r'^2 + \mu_r''^2)}} \\ &= \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r'\mu_r'}}{\sqrt{2}c} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}\frac{\mu_r''}{\mu_r'} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_r''^2}{\varepsilon_r'^2} + 1\right)\left(\frac{\mu_r''^2}{\mu_r'^2} + 1\right)}} \\ &= \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_r'\mu_r'}}{\sqrt{2}c} \sqrt{(\tan \delta_\varepsilon \tan \delta_\mu - 1) + \sqrt{(\tan^2 \delta_\varepsilon + 1)(\tan^2 \delta_\mu + 1)}}\end{aligned}$$

参考文献

- 三好 旦六「光・電磁波論」培風館、1987
- 遠藤 雅守「電磁波の物理－その発生・伝播・吸収・共振を電磁気学で理解する－」森北出版、2014
- 左貝 潤一「電気系のための光工学 －回路理論に基づいて－」共立出版、2022