# フレネル反射
# ーインピーダンスの不整合ー

渡邉 俊夫

# 概要

異なる2つの媒質の境界に垂直に入射した光の電界振幅の反射係数 $r$ は、通常、媒質の屈折率 $n$ を用いたフレネルの式

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

で表される。しかし、これは媒質の透磁率が $\mu \approx \mu_0$ の非磁性体の場合に成り立つ関係式であり、一般には、媒質のインピーダンス $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ を用いて

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

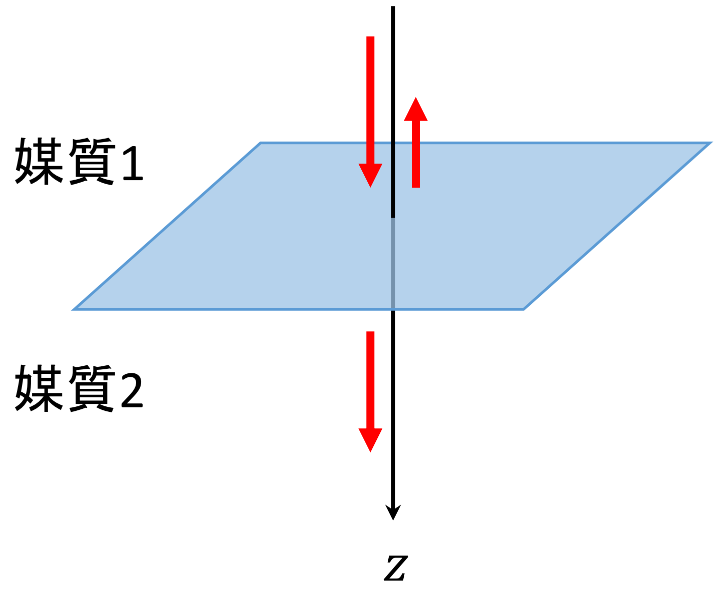
で表されることを示す。

# 波数

異なる2つの媒質の境界に垂直に入射した光の反射と透過を考える。

境界面を $xy$ 平面（$z=0$）とし、それと垂直に $z$ 軸をとる。

光の電界の $z$ 方向の波数を入射側の媒質1中で $\beta_1$、
透過側の媒質2中で $\beta_2$ とすると




$$\beta_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda v_1} = \frac{\omega}{v_1} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi n_2}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda v_2} = \frac{\omega}{v_2} = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$$

ここで、$\lambda$ は光の波長、$\omega$ は角周波数、$c$ は真空中の光速、
$n_1, n_2$ は媒質1, 2の屈折率、$v_1, v_2$ は媒質1, 2中の位相速度であり、
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は媒質1, 2の誘電率、$\mu_1, \mu_2$ は媒質1, 2の透磁率である。

# 電界

光の電界の振動方向を $y$ 軸方向として、入射光の電界振幅を $E_0$、境界面での振幅反射係数を $r$、振幅透過係数を $p$ とすると
媒質1中の電界は

$$E_{y1} = E_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - \beta_1 z)} + rE_0 \mathrm{e}^{j(\omega t + \beta_1 z)}$$

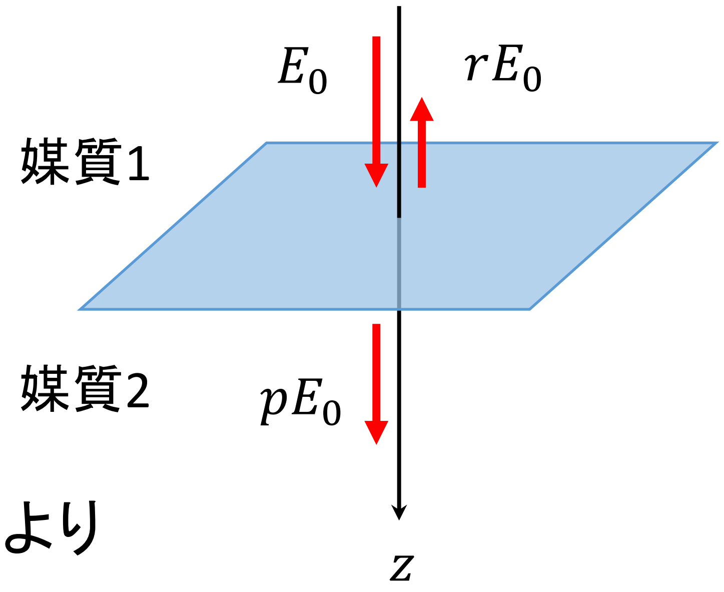
媒質2中の電界は

$$E_{y2} = pE_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - \beta_2 z)}$$

境界面($z = 0$)で電界の接線成分($y$ 成分)が連続であることより

$$E_0 \mathrm{e}^{j\omega t} + rE_0 \mathrm{e}^{j\omega t} = pE_0 \mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$\therefore 1 + r = p$$




振幅透過係数は通常 $t$ で表されるが、ここでは、時間 $t$ と区別するために $p$ で表すことにした。

# 電界と磁界の関係式

マクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

より、磁界の $x$ 成分は

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}$$

を満たすから、電界が $z$ 成分をもたないとき（または、$z$ 成分が $y$ 方向に変化しないとき）、磁界の時間依存性を $\mathrm{e}^{j\omega t}$ とすれば

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \qquad \therefore H_x = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

# 磁界

したがって、媒質1中の磁界は

$$H_{x1}=-\frac{\beta_1}{\omega\mu_1}E_0\mathrm{e}^{j(\omega t-\beta_1 z)}+\frac{\beta_1}{\omega\mu_1}rE_0\mathrm{e}^{j(\omega t+\beta_1 z)}$$

媒質2中の磁界は

$$H_{x2}=-\frac{\beta_2}{\omega\mu_2}pE_0\mathrm{e}^{j(\omega t-\beta_2 z)}$$

境界面($z=0$)で磁界の接線成分($x$ 成分)が連続であることより

$$-\frac{\beta_1}{\omega\mu_1}E_0\mathrm{e}^{j\omega t}+\frac{\beta_1}{\omega\mu_1}rE_0\mathrm{e}^{j\omega t}=-\frac{\beta_2}{\omega\mu_2}pE_0\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$\therefore\frac{\beta_1}{\mu_1}(1-r)=\frac{\beta_2}{\mu_2}p$$

# 反射係数と透過係数

ここで、波数が $\beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}, \beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ と表されることより

$$\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\mu_1}(1-r) = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\mu_2}p \qquad \therefore \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(1-r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}p$$

これを媒質のインピーダンス $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ を用いて表すと

$$\frac{1}{Z_1}(1-r) = \frac{1}{Z_2}p \qquad \therefore Z_2(1-r) = Z_1 p$$

電界の連続条件から得られた関係 $1 + r = p$ を代入すると

$$Z_2(1-r) = Z_1(1+r)$$

$$(Z_2 + Z_1)r = Z_2 - Z_1$$

$$\therefore r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \qquad \therefore s = 1 + r = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

# 反射光と透過光の位相

以上より、垂直入射の場合、光の電界の振幅反射係数 $r$ と振幅透過係数 $p$ は

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \qquad p = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

で表される。

第1式から次のことがわかる。

$Z_2 > Z_1$ のとき、$r > 0$ で、反射光の位相は入射光と同じである。

$Z_2 = Z_1$ のとき、$r = 0$ となり、反射は生じない。

$Z_2 < Z_1$ のとき、$r < 0$ となり、反射光の位相は入射光に対して $\pi$ ずれる。

また、第2式から透過光の位相は常に入射光と同じであることがわかる。

# 反射光と透過光の振幅

光の電界の振幅が $E_0$ であるとき、磁界の振幅は

$$H_0 = \frac{\beta}{\omega\mu}E_0 = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\mu}E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0 = \frac{E_0}{Z}$$

となる。

入射側の媒質1より透過側の媒質2のインピーダンスが大きいとき（$Z_2 > Z_1$）、同じ電界の大きさに対する磁界の大きさは、媒質1中より媒質2中の方が小さくなる。このとき、電界と磁界が連続であるためには、振幅透過係数は $p > 1$、振幅反射係数は $r > 0$ でなければならない。

入射側の媒質1より透過側の媒質2のインピーダンスが小さいとき（$Z_2 < Z_1$）、同じ電界の大きさに対する磁界の大きさは、媒質1中より媒質2中の方が大きくなる。このとき、電界と磁界が連続であるためには、振幅透過係数は $p < 1$、振幅反射係数は $r < 0$ でなければならない。

# 反射光と透過光のパワー

光が伝送するパワー(電力)は、ポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ の大きさで表される。したがって、反射光と透過光のパワーの和は

$$rE_0 \cdot \frac{\beta_1}{\omega\mu_1} rE_0 + pE_0 \cdot \frac{\beta_2}{\omega\mu_2} pE_0 = \frac{\beta_1}{\omega\mu_1} r^2 {E_0}^2 + \frac{\beta_2}{\omega\mu_2} p^2 {E_0}^2 = \frac{\beta_1}{\omega\mu_1} {E_0}^2 \left( r^2 + \frac{\beta_2\mu_1}{\beta_1\mu_2} p^2 \right)$$

であり、上式の最右辺の( )内は

$$r^2 + \frac{\beta_2\mu_1}{\beta_1\mu_2} p^2 = r^2 + \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \cdot \mu_1}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \cdot \mu_2} p^2 = r^2 + \frac{\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}} p^2$$

$$= \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 + \frac{Z_1}{Z_2} \left( \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \right)^2 = \frac{(Z_2 - Z_1)^2 + 4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} = 1$$

だから、反射光と透過光のパワーの和は入射光のパワーに等しい。

# まとめ

異なる2つの媒質の境界に光が垂直に入射した場合、光の電界の振幅反射係数 $r$ と振幅透過係数 $p$ は、媒質のインピーダンス $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ を用いて

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \qquad p = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

で表される。したがって、異なる2つの媒質の境界での光の反射は、本質的には、屈折率の不整合ではなく、インピーダンスの不整合によって生じる現象である。

## 参考文献


- 三好 旦六「光・電磁波論」培風館、1987
- 左貝 潤一「電気系のための光工学 ―回路理論に基づいて―」共立出版、2022