先端科学特別講義
[2617]

AIによるヤコビアン予想の反例の発見

鹿児島大学大学院 理工学研究科
工学専攻 電気電子工学プログラム
渡邉 俊夫

概要

1939年に定式化されてから87年間未解決だったヤコビアン予想について、3変数の場合の反例がAIを用いて見つかったことが2026年7月20日に公表された。

ヤコビアン予想の主張は比較的平易で、その反例の検証も初等的である。

本講義では、今回発見されたヤコビアン予想の反例について解説し、それを通して数学におけるAIの利用について考える。

目次

1. AIと数学：ヤコビアン予想の反例
2. AI登場以前の数学とコンピュータ
3. AIの進展：今後の展望

AIと数学：ヤコビアン予想の反例

ヤコビアン予想

2026年7月20日、Anthropic社のL. Alpögeは、同社の生成AI Claude Fable 5を用いてヤコビアン予想の3変数の場合の反例を見つけたことをXに投稿した。

hello there the jacobian conjecture is false thanx to my close friend Akhil for asking about it and my other friend fable for working during the world cup final

((1+xy)^3 z + y^2 (1+xy) (4+3xy), y + 3 x (1+xy)^2 z + 3 x y^2(4+3xy), 2 x - 3 x^2 y – x^3 z): \C^3\to \C^3, has jacobian determinant -2, and sends (0, 0, -1/4), (1, -3/2, 13/2), and (-1, 3/2, 13/2) to (-1/4, 0, 0)

https://x.com/__alpoge__/status/2079028340955197566?s=20

Levent Alpöge
(1992-)

以下、出典の記載のない画像はWikipediaより

ヤコビアン予想

ヤコビアン予想は1939年にO. H. Kellerが定式化したもので、これまで87年間未解決であった。

1998年にS. Smaleが挙げた「次世紀の数学問題」の第16問題である。

Ott-Heinrich Keller
（1906-1990）

Stephen Smale
（1930-）

21世紀の数学問題

1998年にS. Smaleが挙げた「次世紀の数学問題」は、以下の18の問題である。

1	リーマン予想	10	Pughの閉補題
2	ポアンカレ予想	11	1次元力学系は一般に双曲型か?
3	$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ 問題	12	微分同相写像の中心化群
4	1変数多項式の整数零点	13	代数曲線と曲面の位相の問題
5	ディオファントス曲線の高さ限界	14	ローレンツアトラクター
6	天体力学における相対平衡数の有限性	15	ナビエ・ストークス方程式
7	2-球面上の点の分布	**16**	**ヤコビアン予想**
8	経済学理論への力学の導入	17	多項式を平均多項式時間で解くこと
9	線形計画問題	18	人間の知能と人工知能の限界

ヤコビアン

ヤコビアンは、多変数ベクトル値関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ の各成分の各軸方向への方向微分を並べてできる行列の行列式であり、変数変換に伴う面積要素や体積要素の変化率の無限小変化での極限値を表す。

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ に対して

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

このとき、$\mathrm{d}f_1 \mathrm{d}f_2 \cdots \mathrm{d}f_n = J \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$ である。

Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851)

ヤコビアン

例）

2次元極座標と直交座標の変換：$(r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$\therefore \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

球座標と直交座標の変換：$(r,\theta,\phi) \to (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi\,, r\sin\theta\sin\phi\,, r\cos\theta)$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2(\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + \sin^3\theta\sin^2\phi + \sin^3\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi)$$

$$= r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) = r^2\sin\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

ヤコビアン予想とは

n 個の複素変数を n 個の複素変数へ写す多項式写像において、ヤコビアンが非 0 の定数であれば、多項式逆写像をもつ。

つまり、ヤコビアンが 0 でない定数である（＝任意の点の近傍で局所的に空間は潰れていない）ならば、空間全体で逆写像が存在する（＝入力と出力は１対１に対応する）という主張である。

$n = 3$ の場合

$(x, y, z) \to (u, v, w)$ に対して、$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ が定数であれば、

異なる (x, y, z) は異なる (u, v, w) を与える（全単射である）。

AIが見つけた反例

多項式写像

$$u = (1+xy)^3 z + y^2(1+xy)(4+3xy)$$
$$v = y + 3x(1+xy)^2 z + 3xy^2(4+3xy)$$
$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$

のヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = -2 \quad (\text{非 } 0 \text{ の定数})$$

であるが、$\left(0, 0, -\frac{1}{4}\right), \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$ をいずれも $\left(-\frac{1}{4}, 0, 0\right)$ に写す。

確認と拡張

AIが見つけた $n = 3$ の場合の反例は、定理証明支援システムLeanによって正しいことが確認された。

ヤコビアン予想は、$n = 3$ で偽であれば、$n > 3$ の場合についても、恒等写像を付け加えることで、すべての n で反例が得られる。

$$u = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy)$$
$$v = y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy)$$
$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$
$$s = t$$
$$\dots$$

したがって、ヤコビアン予想は $n \geq 3$ で偽である。

なお、$n = 1$ の場合は、自明に成立する。

$n = 2$ の場合は、現時点で未解決である。

ヤコビアン予想

https://www.youtube.com/watch?v=EIlHFMoDzx0

$n = 1$ の場合

1変数の多項式写像

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

のヤコビアン

$$J = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

が非 0 の定数のとき、$a_1 \neq 0, a_k = 0$（$k \geq 2$）だから

$$u = a_0 + a_1 x$$

となる。これは、$a_1 \neq 0$ より多項式逆写像

$$x = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{u}{a_1}$$

をもつ。

手計算による検算①

$(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right)$ のとき

$$u = (1+xy)^3 z + y^2(1+xy)(4+3xy)$$
$$= (1+0\cdot 0)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 0^2 \cdot (1+0\cdot 0)\cdot(4+3\cdot 0\cdot 0) = -\frac{1}{4}$$

$$v = y + 3x(1+xy)^2 z + 3xy^2(4+3xy)$$
$$= 0 + 3\cdot 0\cdot(1+0\cdot 0)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3\cdot 0\cdot 0^2\cdot(4+3\cdot 0\cdot 0) = 0$$

$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z = 2\cdot 0 - 3\cdot 0^2\cdot 0 - 0^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

手計算による検算②

$(x,y,z)=\left(1,-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$ のとき

$$u=(1+xy)^3z+y^2(1+xy)(4+3xy)$$

$$=\left(1+1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^3\cdot\frac{13}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(1+1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left(4+3\cdot1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{13}{2}+\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{13}{16}+\frac{9}{16}=-\frac{1}{4}$$

$$v=y+3x(1+xy)^2z+3xy^2(4+3xy)$$

$$=-\frac{3}{2}+3\cdot1\cdot\left(1+1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2\cdot\frac{13}{2}+3\cdot1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(4+3\cdot1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$=-\frac{3}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{13}{2}+3\cdot\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{39}{8}-\frac{27}{8}=-\frac{12}{8}+\frac{39}{8}-\frac{27}{8}=0$$

$$w=2x-3x^2y-x^3z=2\cdot1-3\cdot1^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1^3\cdot\frac{13}{2}=2+\frac{9}{2}-\frac{13}{2}=0$$

手計算による検算③

$(x,y,z)=\left(-1,\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$ のとき

$$u=(1+xy)^3z+y^2(1+xy)(4+3xy)$$

$$=\left(1-1\cdot\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{13}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(1-1\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(4-3\cdot1\cdot\frac{3}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{13}{2}+\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{13}{16}+\frac{9}{16}=-\frac{1}{4}$$

$$v=y+3x(1+xy)^2z+3xy^2(4+3xy)$$

$$=\frac{3}{2}+3\cdot(-1)\cdot\left(1-1\cdot\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{13}{2}+3\cdot(-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(4-3\cdot1\cdot\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{13}{2}-3\cdot\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{39}{8}+\frac{27}{8}=\frac{12}{8}-\frac{39}{8}+\frac{27}{8}=0$$

$$w=2x-3x^2y-x^3z=2\cdot(-1)-3\cdot(-1)^2\cdot\frac{3}{2}-(-1)^3\cdot\frac{13}{2}=-2-\frac{9}{2}+\frac{13}{2}=0$$

手計算による検算

$$u = (1+xy)^3 z + y^2(1+xy)(4+3xy)$$
$$v = y + 3x(1+xy)^2 z + 3xy^2(4+3xy)$$
$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$

のとき

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = -2$$

かどうか？　　☛ **上式は正しい（計算過程は別資料）**

数学における予想とその解決

前提：いくつかの場合について、命題が成り立つ

⬇ **帰納**

予想：すべての場合について、命題が成り立つ

反例：ある場合について、命題は成り立たない

1つでも反例が見つかれば、予想は偽となる（否定的に解決される）。

予想が真であることを証明する（肯定的に解決する）には、すべての場合について、命題が真であることを示さなければならない。

AIはどうやって反例を見つけたのか

T. Taoらは、ヤコビアン予想の反例の発表直後から生成AIとの対話を重ね、この問題を追究した。

その結果、写像 $F\colon (x,y,z) \to (u,v,w)$ は

$$s = 1 + xy$$
$$t = (1+xy)^2 z + y^2(4+3xy)$$

とおくことで、写像 $G\colon (x,y,z) \to (x,s,t)$ と
写像 $H\colon (x,s,t) \to (u,v,w)$ の合成写像で表され、
これが空間内の一般の点に対して、3つの異なる入力が同じ1つの出力に写る（3対1の写像）構造を作っていることがわかった。

したがって、AIはヤコビアン予想の反例をしらみつぶしに探して見つけたのではなく、ある程度の見通しをもって見つけたと推定される。

Terence Tao
（1975-）

AI登場以前の数学とコンピュータ

メルセンヌ予想

初めは人間によって予想の検証が行われ、コンピュータが開発されて以降、その拡張が大幅に進展した例として、メルセンヌ予想を取り上げる。

メルセンヌ予想は、1644年にM. Mersenneが立てた次の予想である。

自然数 $n \leq 257$ に対して、$2^n - 1$ が素数になるのは

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

のときのみである。

ここで、$M_n = 2^n - 1$ をメルセンヌ数という。

また、$M_n = 2^n - 1$ が素数であるとき、
これをメルセンヌ素数という。

Marin Mersenne
(1588-1648)

メルセンヌ予想の背景

n が素数ではなく $n = kl$（k, l は 2 以上の整数）と表されるときは

$$2^n - 1 = 2^{kl} - 1 = \left(2^k - 1\right)\left(2^{k(l-1)} + 2^{k(l-2)} + \cdots + 1\right)$$

より、$2^n - 1$ は $2^k - 1$ を因数にもつから、素数ではない。

（n が素数であることは $M_n = 2^n - 1$ が素数であるための**必要条件である**）

しかし、

$$n = 11 : \ M_{11} = \ 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$$

だから、n が素数であっても $M_n = 2^n - 1$ が素数とは限らない。

（n が素数であることは $M_n = 2^n - 1$ が素数であるための**十分条件ではない**）

メルセンヌ予想の背景

$n = 2$： $M_2 = 2^2 - 1 = 3$

$n = 3$： $M_3 = 2^3 - 1 = 7$

$n = 5$： $M_5 = 2^5 - 1 = 31$

$n = 7$： $M_7 = 2^7 - 1 = 127$

が素数であることは、ギリシア時代の西暦100年頃には知られていた。

$n = 13$： $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$

$n = 17$： $M_{17} = 2^{17} - 1 = 131\,071$

$n = 19$： $M_{19} = 2^{19} - 1 = 524\,287$

が素数であることも、13世紀にイスラム圏では知られており、ヨーロッパでもMersenneが予想を立てたときまでには知られていた。

メルセンヌ予想の検証

1772年　L. Euler　$n = 31$ の場合、素数である　$M_{31} = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$

1876年　F. Lucas　効率的な素数判定法（リュカテスト）を考案
$n = 67$ の場合は素数でない（この時点では、因数は不明）

Leonhard Euler
(1707-1783)

François Édouard Anatole Lucas
(1707-1783)

メルセンヌ予想の検証

M_n の10進数での桁数は

$$\log_{10} M_n = \frac{\log_2 M_n}{\log_2 10} = \frac{\log_2(2^n - 1)}{\log_2 10} \cong 0.301n$$

1876年	F. Lucas	$n = 127$ の場合、素数である（M_n は 39 桁）
1883年	I. M. Pervushin	$n = 61$ の場合も素数である（M_n は 19 桁）
1911年	R. E. Powers	$n = 89$ の場合も素数である（M_n は 27 桁）
1914年	R. E. Powers	$n = 107$ の場合も素数である（M_n は 33 桁）
1922年	M. Kraitchik	$n = 257$ の場合は素数でない
1930年	D. H. Lehmer	リュカテストを改良 （リュカ・レーマーテスト）

自然数 $n \leq 257$ に対して、$2^n - 1$ が素数になるのは

$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, \mathbf{61}, \sout{67}, \mathbf{89}, \mathbf{107}, 127, \sout{257}$

のときのみである。

Derrick Henry Lehmer
（1905-1991）

メルセンヌ予想の検証

この素因数を見つけるのに、毎週日曜日に
計算して3年を要したとのこと

1903年　F. N. Cole「大きな数の分解について」アメリカ数学会

2^{67}

$$\begin{array}{r} 761\,838\,257\,287 \\ \times \quad 193\,707\,721 \\ \hline \end{array}$$

メルセンヌ素数の探索

1940年代にコンピュータが開発されてからは、コンピュータを用いてメルセンヌ素数の探索が行われた。

1952年	R. M. Robinson	$n = 521$（M_n は 157 桁）
1952年	R. M. Robinson	$n = 607$（M_n は 183 桁）
1952年	R. M. Robinson	$n = 1279$（M_n は 386 桁）
1952年	R. M. Robinson	$n = 2203$（M_n は 664 桁）
1952年	R. M. Robinson	$n = 2281$（M_n は 687 桁）
1957年	H. Riesel	$n = 3217$（M_n は 969 桁）
1961年	A. Hurwitz	$n = 4253$（M_n は 1281 桁）
1961年	A. Hurwitz	$n = 4423$（M_n は 1332 桁）
1963年	D. B. Gillies	$n = 9689$（M_n は 2917 桁）
1963年	D. B. Gillies	$n = 9941$（M_n は 2993 桁）
1963年	D. B. Gillies	$n = 11\,213$（M_n は 3376 桁）

Robinsonが利用したコンピュータ（SWAT）の記憶装置

メルセンヌ素数の探索

1971年	B. Tuckerman	$n = 19\,937$（M_n は 6002 桁）
1978年	L. C. Noll, L. Nickel	$n = 21\,707$（M_n は 6533 桁）
1979年	L. C. Noll	$n = 23\,209$（M_n は 6987 桁）
1979年	H. L. Nelson, D. Slowinski	$n = 44\,497$（M_n は 13 395 桁）
1982年	D. Slowinski	$n = 86\,243$（M_n は 25 962 桁）
1983年	D. Slowinski	$n = 132\,049$（M_n は 39 751 桁）
1985年	D. Slowinski	$n = 216\,091$（M_n は 65 050 桁）
1988年	W. Colquitt, L. Welsh	$n = 110\,503$（M_n は 33 265 桁）
1992年	D. Slowinski, P. Gage	$n = 756\,839$（M_n は 227 832 桁）
1994年	D. Slowinski, P. Gage	$n = 859\,433$（M_n は 258 716 桁）
1996年	D. Slowinski, P. Gage	$n = 1\,257\,787$（M_n は 378 632 桁）

発見したときは高校生

メルセンヌ素数の探索

Global Internet Mersenne Prime Search

1996年以降、GIMPS（分散コンピューティングを用いたプロジェクト）によるメルセンヌ素数の探索が続けられている。

1996年	J. Armengaud	$n = 1\,398\,269$（M_n は $420\,921$ 桁）
1997年	G. Spence	$n = 2\,976\,221$（M_n は $895\,932$ 桁）
1998年	R. Clarkson	$n = 3\,021\,377$（M_n は $909\,526$ 桁）
1999年	N. Hajratwala	$n = 6\,972\,593$（M_n は $2\,098\,960$ 桁）
2001年	M. Cameron	$n = 13\,466\,917$（M_n は $4\,053\,946$ 桁）
…		
2018年	P. Laroche	$n = 82\,589\,933$（M_n は $24\,862\,048$ 桁）
2024年	L. Durant	$n = 136\,279\,841$（M_n は $41\,024\,320$ 桁）

現時点までに見つかっているメルセンヌ素数は52個である。

メルセンヌ素数が無限に存在するかは未解決である。

コンピュータを利用した数学問題の証明

コンピュータによる計算を用いて証明された数学の問題として

- **四色問題**
- **ケプラー予想**
- **ローレンツアトラクター**

などがある。

四色問題

四色問題は、1852年にF. Guthrieが弟に示したのを発端とする次の問題である。

4色あれば、平面上のどんな地図でも隣り合う国々が異なる色になるように塗り分けることができるか？

（ただし、飛び地はないものとする）

6色で塗り分け可能なことは、オイラーの多面体公式 $V-E+F=2$（1750年）から導かれる。

V：頂点、E：辺、F：面の数

Francis Guthrie
（1831-1899）

四色問題の証明

1879年　A. Kempe　4色で塗り分け可能との証明を発表

1890年　P. Heawood　証明の不備を指摘
（5色ならば十分だが、4色で十分とは言えない）

1976年　K. Appel, W. Haken
コンピュータを用いて、
4色で塗り分け可能を証明
（予稿では1936個、最終稿では
1405個の可約配置を計算）

100ページの概要と100ページの詳説、
700ページの予備的な研究成果

Kenneth Appel
（1932-2013）

Wolfgang Haken
（1928-2022）

1996年　N. Robertson, D. Sanders,
P. Seymour, R. Thomas　可約配置を633個に削減

2004年　G. Gonthier　定理証明支援システムCoqを用いて、4色で可能を証明

ケプラー予想

ケプラー予想は、1611年にJ. Keplerが立てた次の予想である。

3次元の空間を大きさの等しい球で充填するとき、最も密度が高いのは
立方最密充填（面心立方）配置および六方最密充填配置である。

1900年にD. Hilbertは「23の未解決問題」の
第18問題に、関連する問題と合わせて
ケプラー予想を挙げた。

充填率は

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 74.048\,\%$$

Johannes Kepler
（1571-1630）

ケプラー予想の証明

1998年　T. C. Halesがコンピュータを用いた証明を発表
（5000種類以上の配置について計算）

250ページの原稿、3ギガバイトのプログラムとデータ

2003年　論文誌の査読者団代表が「証明の正しさに
99%の確信をもっている」と報告

2015年　T. C. Halesが率いるプロジェクトが
定理証明支援システムIsabelleと
HOL Lightを用いて、形式的証明を完了

Thomas Callister Hales
（1958-）

ローレンツアトラクター問題

ローレンツアトラクター問題は、1963年にE. Lorenzが提示した方程式に関する次の問題である。

ローレンツ方程式が $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ において、
真の幾何学的ストレンジアトラクター（頑健なカオス）
をもつことを数学的に厳密に証明せよ。

1998年にS. Smaleが挙げた「次世紀の数学問題」の第14問題である。

2002年、W. Tuckerが精度保証付き演算の手法を採用し、コンピュータを用いた証明に成功した。

Edward Norton Lorenz
（1917-2008）

ローレンツアトラクター

ローレンツ方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z$$

は下から温められ、上から冷やされる大気の変動を記述する数学モデルである。

ここで、x は対流速度、y は水平温度変化、z は垂直温度変化を表す。

また、σ はプラントル数（流体の動粘度と温度拡散率の比）、ρ はレイリー数（流体中の伝熱に関する指数）の不安定度を表すパラメータ、β は臨界水平波数に関するパラメータである。

https://science-log.com/wp/wp-content/uploads/2021/08/LorenzAttractor_10000t_viridis_En_half-768x754.png

人間による数学問題の解決

コンピュータを用いずに、人間によって証明された数学的な難問題には

- **フェルマー予想**
- **ポアンカレ予想**
- **ABC予想**

などがある。

フェルマー予想

フェルマー予想は、P. de Fermatが所蔵していた本の余白に書き込みをしていたことにもとづく次の予想である。

3以上の整数 n について、$x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 (x, y, z) は存在しない。

$n = 2$ の場合、$x^2 + y^2 = z^2$ は三平方の定理であり、
これを満たす自然数 (x, y, z) は無数に存在する。

$n = 4$ の場合、 $x^4 + y^4 = z^4$ を満たす
自然数 (x, y, z) が存在しないことは、
Fermatが証明を残していた。

これより、n が奇素数（2でない素数）
の場合のみを考えればよいことになる。

Pierre de Fermat
（1607-1665）

フェルマー予想の証明

1760年　L. Euler　$n = 3$ の場合を証明

1823年　M.-S. German
n が奇素数で x, y, z のいずれも n で割り切れない場合を証明

1825年　P. Dirichlet, A.-M. Legendre
$n = 5$ の場合を証明

1839年　G. Lamé
$n = 7$ の場合を証明

1840年　V.-A. Lebesgue
$n = 7$ の場合の証明の誤りを訂正

フェルマー予想の証明

1847年　E. Kummer　n が正則素数の場合を証明

1857年　E. Kummer　100 以下の非正則素数（$n = 37, 59, 67$）の場合を証明

～1994年　コンピュータを用いた計算により
$n < 4\,000\,000$ の場合に成り立つことが確認

1993年　A. J. Wiles　一般の n の場合の証明を発表

1994年　A. J. Wiles　一般の n の場合の証明を修正

1995年　上記の証明の検証が完了
（数か月を要した）

2026年9月　Anthropic社　生成AI Claudeを用いて、
定理証明支援システムLeanで検証できる
形式化に成功（11日間）

Andrew John Wiles
（1953-）

ポアンカレ予想

ポアンカレ予想は、1904年にH. Poincaréが提示した次の予想である。

単連結な3次元閉多様体は3次元球面 S^3 に同相である。

つまり、穴のない3次元立体の中では、任意の閉曲線を縮めて1つの点にすることができるという主張である。

ポアンカレ予想は、1998年にS. Smaleが
挙げた「次世紀の数学問題」の第2問題である。
また、2000年にクレイ数学研究所が発表した
ミレニアム懸賞問題の1つでもある。

Jules-Henri Poincaré
(1854-1912)

ミレニアム懸賞問題

ミレニアム懸賞問題は、2000年にクレイ数学研究所が発表した数学の7つの未解決問題である。1問につき、100万ドルの懸賞金がかけられている。

1. ヤン・ミルズ方程式と質量ギャップ問題
2. リーマン予想
3. $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 問題
4. ナビエ・ストークス方程式の解の存在と滑らかさ
5. ホッジ予想
6. バーチ・スウィンナートン=ダイアー予想
7. ポアンカレ予想

n次元のポアンカレ予想の証明

フィールズ賞：国際数学連合（IMU）が4年に1度、
40歳未満の数学者に授与する数学界で最も権威ある賞

$n = 2$ の場合に成立することは、Poincaréが予想を立てたときにわかっていた。

1960年	S. Smale	$n \geq 5$ の場合を証明　→ フィールズ賞を受賞
1960年	J. R. Stallings	別の方法で $n \geq 7$ の場合を証明
1961年	E. C. Zeeman	$n = 5, 6$ の場合を証明
1982年	M. Freedman	$n = 4$ の場合を証明　→ フィールズ賞を受賞
2003年	G. Perelman	独自の方法で $n = 3$ の場合を証明 （arXivで発表）
2006年	フィールズ賞をPerelmanに授与したが、本人が辞退 （同年の受賞はA. Okounkov, T. Tao, W. Werner）	
2010年	クレイ数学研究所がPerelmanのミレニアム懸賞の 受賞を発表したが、本人が拒否	

Grigori Y. Perelman
（1966-）

ABC予想

ABC予想は、1985年にJ. OesterléとD. Masserにより提示された次の予想である。

互いに素な自然数 a, b の和を $a+b=c$ とするとき、積 abc の異なる素因数の積を $\mathrm{rad}(abc)$ とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$c > (\mathrm{rad}(abc))^{1+\varepsilon}$ を満たす (a,b,c) の組は高々有限個しか存在しない。

つまり、乗算の素因数で決まる大きさに比べて、加算の値が極端に大きくなる組はほとんどないという主張である。

例）
$a=3, b=4$ のとき $c=a+b=7$ で、
$abc=3\times4\times7=2\times2\times3\times7$ なので
$\mathrm{rad}(abc)=2\times3\times7=42>7=c$

Joseph Oesterlé
（1954-）

David William Masser
（1948-）

ABC予想の証明の進展

2012年　望月新一　宇宙際タイヒミュラー理論を用いた証明を発表

2021年　望月新一　論文がPRIMS（京都大学の専門誌）に掲載

現在までに、証明の不備の指摘があり、
数学界全体での完全な合意は得られて
いないとされている。

定理証明系システムLeanなどを用いた
検証プロジェクトが進められている。

望月新一（1969-）

https://mainichi.jp/graphs/20200403/mpj/00m/040/003000f/20200403k0000m040097000p

AIの進展：今後の展望

AIの進展：大規模言語モデル

言語モデルは、文章中の前の単語列から次の単語を予測できるように機械学習するモデルである。言葉のもつ意味を理解することはせず、確率の構造の中で言語を扱い、次の単語を予測する。

言語モデルを大規模化していく過程で、訓練データサイズだけでなく、モデルサイズを大きくしていくと、次の単語の予測性能が向上することがわかった。さらに、それまでまったく解けなかった問題が、ある時点から急に解けるようになることもわかった。

大規模言語モデルの予測機能は、文章に限らず、画像や音楽やプログラムコードにも適用できる。そして、次を予測することは、生成する能力につながる。

ニューラルネットワーク

大規模言語モデルは、ニューラルネットワークを利用して次の単語を予測する。
ニューラルネットワークを構成するニューロンは、シナプスでつながった他のニューロンから情報を受け取る。シナプスは接続の強さを表す重みパラメータをもつ。

ニューロンは層を単位にまとまっており、各層間がシナプスでつながっている。
入力層と出力層の間の層を中間層（隠れ層）という。

入力から出力を**推定**する際は、入力に割り当てられたニューロンの活性値を設定して、ニューラルネットワークの中を伝播させていき、出力に割り当てられたニューロンの活性値を読み取る。

訓練データから**学習**する際は、予測と正解との誤差求め、それを逆向きに伝播させて、各パラメータの修正量を求める。

AIの進展：個人的な体験

4次方程式 $64x^4 + 64x^3 - 8x + 1 = 0$ の解をChatGPTに訊いてみたところ、2025年3月22日には間違った答が返ってきて、問い詰めると動かなくなってしまったが、4月17日に改めて訊いたら正しい答が返ってきた。

T. Watanabe et al., "3-stage Mach-Zehnder Interferometer Optical Switch with Ripple-free Response," Proc. MOC 2025, PO-46.

AIの活用：光導波路設計

光ファイバー通信に用いられる光回路の設計に波面整合法を用いることによって、人間では思いつかないような光導波路のパターンを生成し、特性を向上できる。

Y. Sakamaki et al., “New Optical Waveguide Design Based on Wavefront Matching Method,” J. Lightwave Technol., vol. 25, no. 11, pp. 3511-3518, 2007.

AIの活用：将棋

将棋では、AIの指し手の読みがプロ棋士を上回るレベルに達している。それに伴い、棋士の対局前の研究や、ファンの観戦の楽しみ方も変化してきている。

ABEMA　第39期 竜王戦 七番勝負 第2局 2日目（2026年10月23日）

代表的な生成AI

ChatGPT

Claude

Gemini

Grok

AIによる数学問題の解決

2026年8月1日

Open AI社が次期主力AIモデルAstraの未公開版を用いて、数学と理論計算機科学に関する10件の未解決課題について、新たな成果を挙げたと発表

2026年9月8日

Open AI社が未公開の社内AIモデルと約1万のAIエージェントを用いて、数学のミレニアム懸賞問題の1つの「**ナビエ・ストークス方程式の解の存在と滑らかさ**」について、その一部を解決する解析的証明と定理証明支援システムLeanによる形式化を生成したと発表

2026年10月6日

Open AI社が社内の最先端モデルを用いて得られた新しい数学的成果を発表（GitHubのリポジトリに722本の論文を公開）

ナビエ・ストークス方程式

ナビエ・ストークス方程式は、流体の速度 $\boldsymbol{v}$ に関する方程式であり、

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right)=-\boldsymbol{\nabla}p+\frac{\mu}{3}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})+\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}$$

で表される。ここで、ρ は流体の密度、p は圧力、μ は粘性率、$\boldsymbol{f}$ は外力である。

3次元空間と時間の中で、非圧縮性の流体（$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$）に対して初期速度を与えると、ナビエ・ストークス方程式の解となる速度ベクトル場と圧力のスカラー場が存在して、双方とも滑らかで大域的に定義されるか？

という問題は、1998年にS. Smaleが挙げた「次世紀の数学問題」の第15問題である。また、 2000年にクレイ数学研究所が発表したミレニアム懸賞問題の1つにもなっている。

ナビエ・ストークス方程式

Claude Louis Marie Henri Navier
(1785-1836)

George Gabriel Stokes
(1819-1903)

ナビエ・ストークス方程式

Open AI社は、AIを用いて、ナビエ・ストークス方程式の解として、初期状態で静止している滑らかな流体が有限時間内に特異点を形成し得ることを示す解析的証明とLeanによる形式化を生成した。

今回見つかった解では、ナビエ・ストークス方程式の各項、すなわち加速度、圧力勾配、運動量移送、粘性が、いずれも大きくなりながら、厳密な形で互いに相殺する。
この均衡により、流体の速度が際限なく増大しても、外力は滑らかなまま保たれることになる。

https://openai.com/ja-JP/index/navier-stokes-solution/

数学者の反応

2026年9月11日

フィールズ賞受賞者ら25人が声明を発表

AI企業が自社モデルの性能を測る指標として数学を使っていることに対して批判

2026年10月9日

T. Taoが「**Math 2.0**」と題する講演を行う

証明の稀少性の時代から、証明の豊富さの時代へ

AIの能力を正しく評価するためには、成功例だけでなく、失敗例や計算資源の消費量なども含めた透明性の高い評価が必要

数学の未解決問題は、数学者にとって単に解決することが目的ではなく、その周辺に広がる数学の世界を探索するための灯台である

AIを単に未解決問題を解く道具として使うのではなく、数学的な理解を深め、新しい研究領域を開拓し、数学の知識を現実世界に役立てるために活用する

数学者の反応

https://teorth.github.io/tao-web/slides/math-2-0-caltech-2026.pdf

数学者の反応

https://teorth.github.io/tao-web/slides/math-2-0-caltech-2026.pdf

数学の未解決問題

最後に、その主張が比較的容易に理解できる数学の未解決問題として

- **コラッツ予想**
- **ゴールドバッハ予想**
- **デューラー予想**
- **ルジャンドル予想**
- **リーマン予想**

を紹介する。

コラッツ予想

コラッツ予想は、次のものである。

数列 a_n を漸化式

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & (n：偶数) \\ 3a_n + 1 & (n：奇数) \end{cases}$$

で定めると、どんな初期値 a_0 から始めてもいつか必ず 1 になる。

（その後は $1, 4, 2, 1, \cdots$ を繰り返す）

学生時代にこのような数列を考えていたL. Collatzにちなむ。

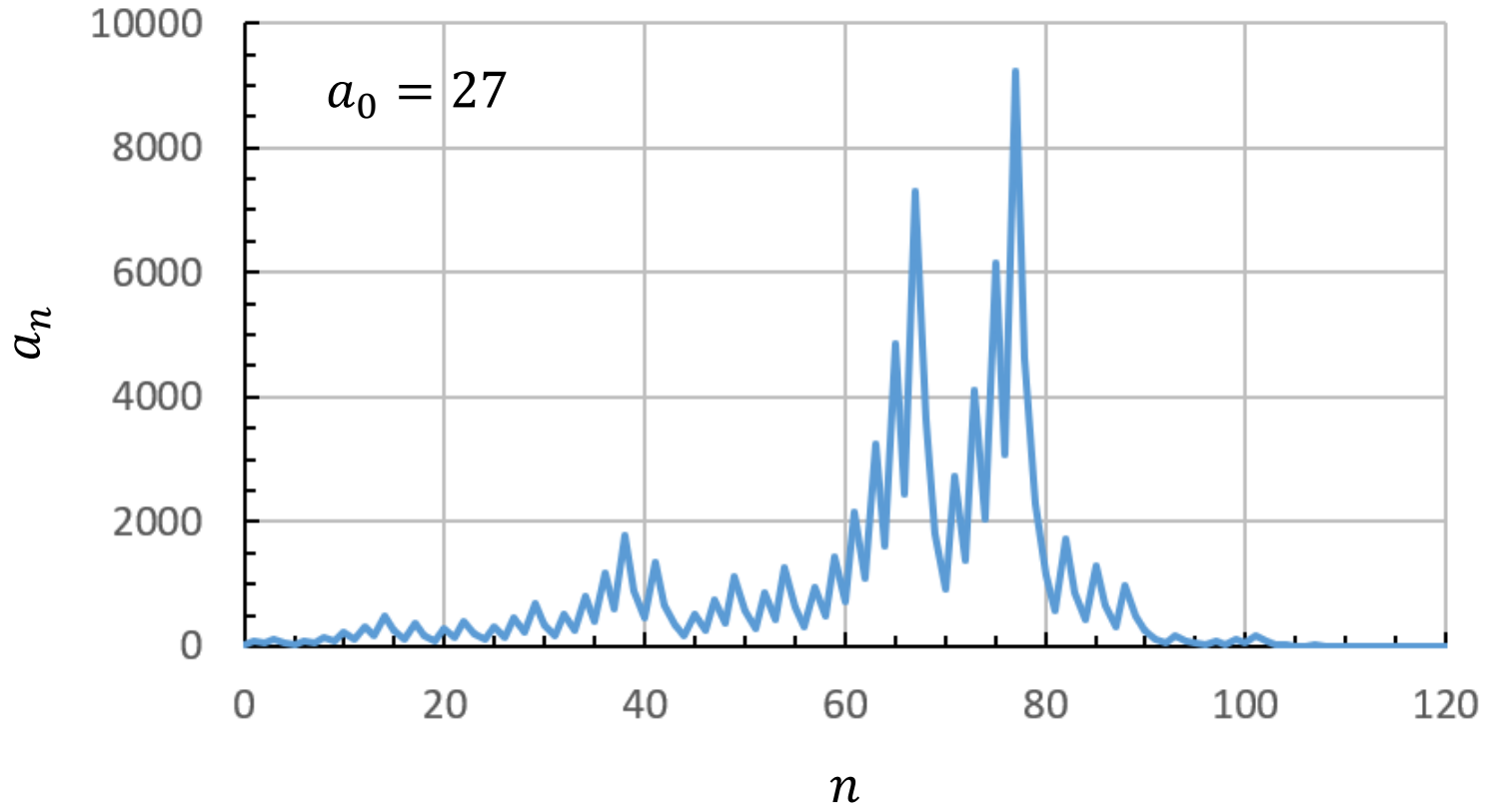
現時点で、コンピュータを用いた計算において、$a_0 < 2^{68}$ までは反例が見つかっていない。

コラッツ予想

例）

$a_0 = 3$ のとき、$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ で、$a_7 = 1$ になる。

$a_0 = 27$ のとき、$27 \to 82 \to 41 \to 124 \to \cdots$ で、最大値 $a_{77} = 9232$ に達した後、$a_{111} = 1$ になる。



ゴールドバッハ予想

ゴールドバッハ予想は、1742年にC. Goldbachが提示した次の予想である。

4以上のすべての偶数は、2つの素数の和で表すことができる。

ただし、2つの素数は同じであってもよい。

例）

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 3 + 7 = 5 + 5$

2015年時点で、コンピュータを用いた計算において、
4×10^{18} までは反例が見つかっていない。

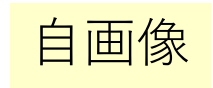
1742年のGoldbachから
Eulerへの手紙

デューラー予想

デューラー予想は、1975年にG. C. Shephardが提示した次の問題である。

> すべての凸多面体は、辺に沿って切り開いたとき、面同士が重ならない展開図をもつか？

多面体の展開図を多く残したA. Dürerにちなむ。



自画像

Albrecht Dürer
(1471-1528)

https://atelierlaporte.blogspot.com/2015/08/blog-post.html

ルジャンドル予想

ルジャンドル予想は、A.-M. Legendreが示した次の予想である。

任意の自然数 n について、n^2 と $(n+1)^2$ の間には必ず素数が存在する。

2015年時点で、コンピュータを用いた計算において、4×10^{18} までは反例が見つかっていない。

例）[ ] 内が平方数、赤字が素数

$[1], 2, 3, [4], 5, 6, 7, 8, [9], 10, 11, 12, 13, 14,$
$15, [16], 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, [25], \ldots$

Adrian-Marie Legendre
(1752-1833)

リーマン予想

リーマン予想は、1859年にB. Riemannが提示した次の予想である。

ゼータ関数の自明でない零点は、すべて実部が $\frac{1}{2}$ の直線（臨界線）上に存在する。

（自明な零点とは、負の偶数 $s = -2, -4, -6, \cdots$ である）

ゼータ関数は、次式で表される複素数 s の関数である。

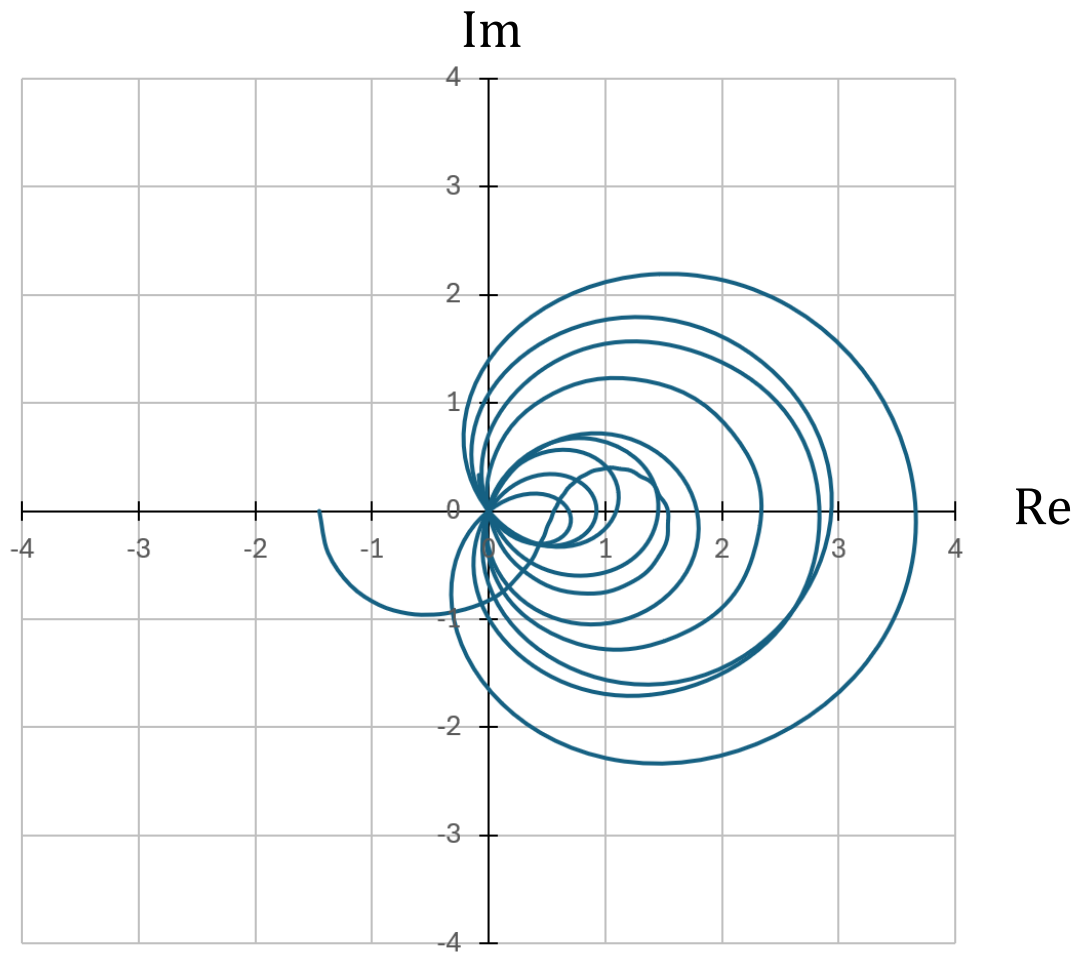
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

リーマン予想は、1998年にS. Smaleが挙げた「次世紀の数学問題」の第1問題である。
また、2000年にクレイ数学研究所が発表したミレニアム懸賞問題の1つでもある。

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

リーマン予想

ゼータ関数 $\zeta(s)$ による臨界線 $s = \frac{1}{2} + it$ 上の点の軌跡は、繰り返し原点を通る。



$0 < s < 1$ において

$$\zeta(s) = \frac{1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \cdots}{1 - 2^{1-s}}$$

リーマン予想の証明の進展

2004年時点で、コンピュータを用いた計算において、虚部が小さい方から 10^{13} 個までの自明でない零点について、反例は見つかっていない。

1974年　N. Levinson　$\frac{1}{3}$ 以上の非自明な零点が臨界線上に存在する

1989年　J. B. Conray　$\frac{2}{5}$ 以上の非自明な零点が臨界線上に存在する

2020年　K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler

$\frac{5}{12}$（$= 41.6\,\%$）以上の非自明な零点が臨界線上に存在する

2026年8月　Anthropic社　生成AI Claudeを用いて、67.25 %以上の非自明な零点が臨界線上にあることの証明の形式化に成功

まとめ

- AIはヤコビアン予想の反例をしらみつぶしに探して見つけたのではなく、ある程度の見通しをもって見つけたと推定される。
- AIが登場する以前にも、桁数の大きな数の計算だけでなく、予想の証明に必要な計算にコンピュータが用いられた例がある。
- AIを単に未解決問題を解く道具として使うのではなく、数学的な理解を深め、新しい研究領域を開拓し、数学の知識を現実世界に役立てるために活用することが望まれる。

参考文献

- 丸岡 章「概説 人工知能－ディープラーニングから生成AIへ」ちくま学芸文庫、2024.
- 岡野原 大輔「大規模言語モデルは新たな知能か－ChatGPTが変えた世界」岩波書店、2023.
- 岡野原 大輔「生成AIのしくみ－＜流れ＞が画像・音声・動画をつくる」岩波書店、2024.
- 中村 滋「フィボナッチ数の小宇宙－フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割」日本評論社、2002.
- ロビン・ウィルソン、茂木 健一郎（訳）「四色問題」新潮文庫、2013.
- ジョージ・G・スピーロ、青木 薫（訳）「ケプラー予想－ 四百年の難問が解けるまで」新潮文庫、2013.
- サイモン・シン、青木 薫（訳）「フェルマーの最終定理」新潮文庫、2006.
- ジョージ・G・スピーロ、鍛原 多恵子、坂井 星之、塩原 通緒、松井 信彦（訳）「ポアンカレ予想－世紀の謎を掛けた数学者、解き明かした数学者」早川書房、2011.
- 中村 亨「数学21世紀の7大難問－数学の未来をのぞいてみよう」講談社、2004.
- 加藤 文元「宇宙と宇宙をつなぐ数学－IUT理論の衝撃」角川書店、2019.
- 中村 亨「リーマン予想とはなにか－全ての素数を表す式は可能か」講談社、2015.