ベクトル三重積

渡邉 俊夫

概要

3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、順に2回外積をとったものを**ベクトル三重積**という。
ベクトル三重積について

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad \cdots①$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad \cdots②$$

が成り立つ。

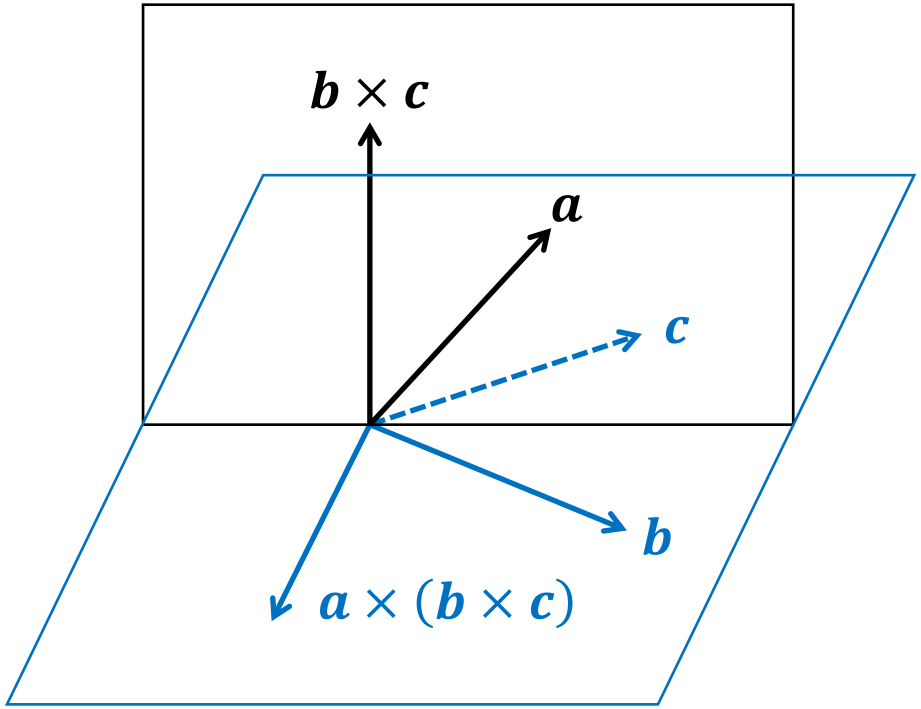
- 左辺のベクトルは、左辺の（　）内の外積ベクトルに垂直だから、それをなす2つのベクトルが張る平面内にあり、その一次結合で書ける。
- 一次結合の係数は、自分以外の2つのベクトルの内積である。
- 一次結合の係数の符号は、左辺の（　）内のベクトルのうち、（　）外の外積に近い方（すなわち、三重積の中央のベクトル）が正、他方が負である。

本稿では、ベクトル三重積の公式を、成分計算を用いずに証明する。

ベクトル三重積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の図解

外積ベクトル $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ は、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ に垂直である。ベクトル三重積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ に垂直だから、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が張る平面内のベクトルである。

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$



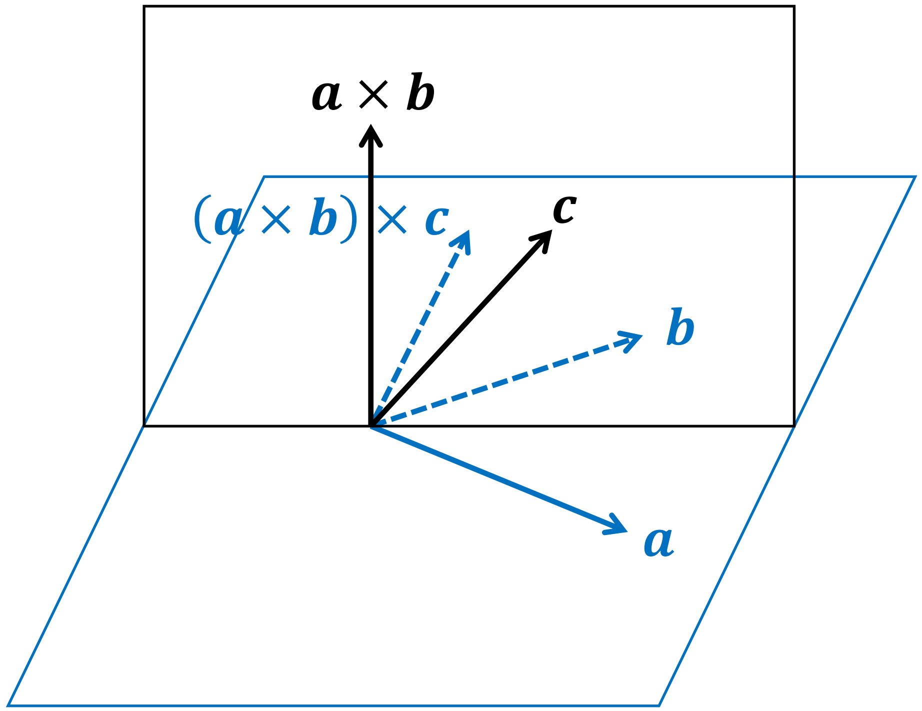
$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が青線で示した平面内にあり、
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ がそれに垂直な平面
（黒線で示した平面）内にあるとき、
$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が張る平面
（青線で示した平面）内のベクトルになる。

$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ に垂直ならば、$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{b}$ の方向、
$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{c}$ に垂直ならば、$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は $-\boldsymbol{c}$ の方向
のベクトルである。

ベクトル三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ の図解

外積ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直である。ベクトル三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とに垂直だから、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面内のベクトルである。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$



$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が青線で示した平面内にあり、
$\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ がそれに垂直な平面
（黒線で示した平面）内にあるとき、
$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面
（青線で示した平面）内のベクトルになる。

$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{b}$ に垂直ならば、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ の方向、
$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$ に垂直ならば、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ は $-\boldsymbol{a}$ の方向
のベクトルである。

公式①と②の関係

ベクトル三重積の公式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad \cdots ①$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad \cdots ②$$

は、外積の交換規則 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ を用いて、一方から他方を導くことができる。

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = -\big((\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\big) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -\big((\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\big) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

そこで、以下では公式①を証明する。

公式①の証明

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ に垂直だから、スカラー λ,μ を用いて

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$$

と書ける。また、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}$ に垂直だから、$\boldsymbol{a}$ との内積をとると

$$0=\boldsymbol{a}\cdot\big(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\therefore\ \frac{\lambda}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=-\frac{\mu}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\kappa\ (\text{定数})$$

となる。したがって、$\lambda=\kappa\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\mu=\kappa\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ であり、

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\kappa\big((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\big)$$

と表せる。

公式①の証明(つづき)

さらに、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ のスカラー三重積をとると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\Big((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\big(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)\Big) &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\Big(\big(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)\times\boldsymbol{a}\Big)\\
&= -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\Big(\boldsymbol{a}\times\big(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)\Big)\\
&= -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\Big(\kappa\Big(\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\Big)\Big)\\
&= -\kappa(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\Big(\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\Big)\\
&= -\kappa\Big(\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\Big)\\
&= -\kappa\Big(\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)^2-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2\Big)\\
&= \kappa\Big(|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2-\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\big)^2\Big)\\
&= \kappa|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|^2
\end{aligned}
$$

公式①の証明（つづき）

いっぽう、

$$\boldsymbol{a}\cdot\left((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\left(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right)\right)=\left(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right)\cdot\left(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right)$$

$$=|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|^2$$

であるから、$\kappa=1$ を得る。以上より、

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

が成り立つ。