

z の i 乗

渡邊 俊夫

z の i 乗

複素数 z, a に対して、複素べき関数の定義

$$z^a = e^{a \log z}$$

と複素対数関数の定義

$$\log z = \text{Log}|z| + i \arg z$$

より

$$z^a = e^{a \log z} = e^{a(\text{Log}|z| + i \arg z)}$$

である。したがって、 $a = i$ のとき

$$\begin{aligned} z^i &= e^{i \log z} = e^{i(\text{Log}|z| + i \arg z)} = e^{i \text{Log}|z| - \arg z} \\ &= e^{-\arg z} e^{i \text{Log}|z|} \end{aligned}$$

となる。

複素指数関数 $z = e^w$ の逆関数が
複素対数関数 $w = \log z$ だから
 $z = e^{\log z}$ である

z の i 乗

z の絶対値を $|z| = r$ 、偏角を $\arg z = \theta$ とすれば、 $z = re^{i\theta}$ と表されるから

$$z^i = e^{-\arg z} e^{i \operatorname{Log}|z|} = e^{-\theta} e^{i \operatorname{Log} r}$$

$$= e^{-\theta} (\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r))$$

となる。ここで、 z の偏角の主値を $\operatorname{Arg} z = \theta_0$ ($-\pi < \theta_0 \leq \pi$) とすると、 n を整数として

$$\theta = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi = \theta_0 + 2n\pi$$

だから

$$z^i = e^{-(\theta_0 + 2n\pi)} (\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r))$$

である。

z の i 乗: 主値

z^i の主値は

$$\begin{aligned} z^i &= e^{i \operatorname{Log} z} = e^{i(\operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{i \operatorname{Log}|z| - \operatorname{Arg} z} \\ &= e^{-\operatorname{Arg} z} e^{i \operatorname{Log}|z|} \\ &= e^{-\theta_0} (\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r)) \end{aligned}$$

である。

z の i 乗: 絶対値と偏角

$$\begin{aligned} z^i &= e^{-\arg z} e^{i \operatorname{Log}|z|} = e^{-\theta} e^{i \operatorname{Log} r} \\ &= e^{-\theta} (\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r)) \\ &= e^{-(\theta_0 + 2n\pi)} (\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r)) \end{aligned}$$

より、 z^i の絶対値と偏角は

$$|z^i| = e^{-\theta} = e^{-(\theta_0 + 2n\pi)}$$

$$\arg(z^i) = \operatorname{Log} r + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

となる。したがって、 z^i の絶対値は z の偏角 θ によって決まり、
 z^i の偏角は z の絶対値 r によって決まる。

z の i 乗

$|z| = r = 1$ のとき、 $\text{Log } r = \text{Log } 1 = 0$ だから

$$z^i = e^{-\theta} (\cos 0 + i \sin 0) = e^{-\theta} = e^{-(\theta_0 + 2n\pi)}$$

であり、 z^i は実数になる。

例えば、

$$(-1)^i = e^{-(\pi + 2n\pi)}$$

$$i^i = e^{-(\pi/2 + 2n\pi)}$$

である。それぞれの主値は

$$(-1)^i = e^{-\pi} = 0.043213918$$

$$i^i = e^{-\pi/2} = 0.207879576$$

である。