平行2線の静電容量

渡邉 俊夫

概要

半径 a の無限に長い円柱導体2本を、中心間隔 d で平行に配置したときの単位長さあたりの静電容量（キャパシタンス）C を、導体表面の電荷が一様に分布していると仮定して求め、$d \gg a$ として近似すると、真空の誘電率を ε_0 として

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)}$$

を得る。この式は、一様な電荷分布を仮定して求めた解の近似であるにもかかわらず、導体表面の電荷の偏りを考慮して、鏡像法により求めた静電容量 C の良い近似式になっていることを述べる。

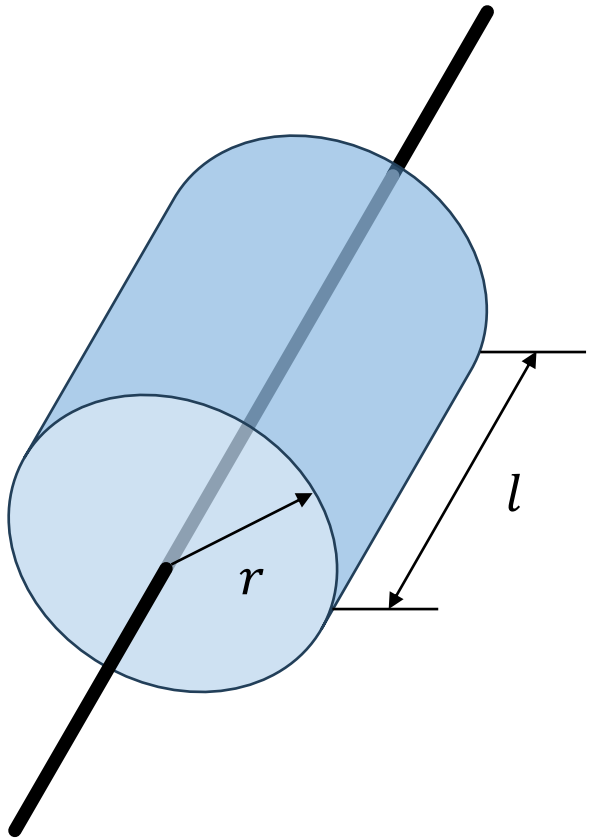
直線電荷のつくる電場

まず、線電荷密度 λ の無限に長い1本の直線電荷がつくる電場 E を求める。

直線電荷を中心軸とする半径 r、長さ l の円筒にガウスの法則を適用すると

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

となる。これは、太さをもたない直線電荷に限らず、有限の太さ（半径 a）の円柱導体の表面に電荷が一様に分布しているときにも成り立つ。



直線電荷のつくる電位

この直線電荷がつくる電位 V は、電位の基準点を r_0 として

$$V = -\int_{r_0}^{r} E\,\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_{r_0}^{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

である。ただし、$r_0 \to 0$ でも $r_0 \to \infty$ でも V が発散してしまうことに注意が必要である。

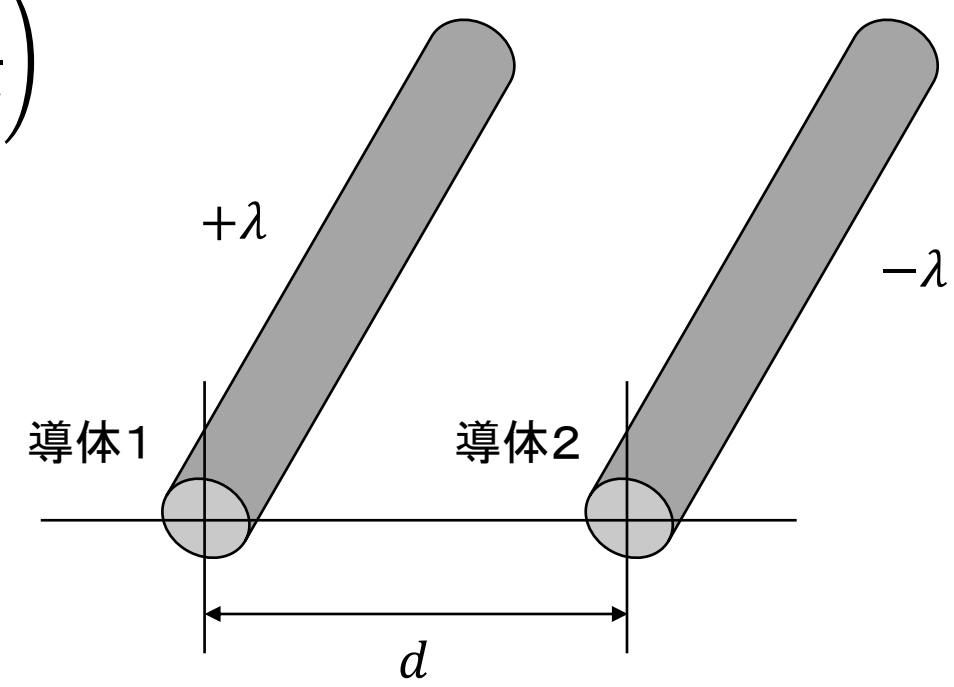
平行2線のつくる電場：一様分布

半径 a の無限に長い円柱導体2本が中心間隔 d で平行に配置され、それぞれの導体の表面に線電荷密度 $\pm\lambda$ の電荷が一様に分布している場合を考える。

このとき、2線間で、導体1（線電荷密度 $+\lambda$）の中心から距離 r の位置に、2本の導体がつくる電場は

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (r-d)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)$$

である。



平行2線の電位差：一様分布

導体2（線電荷密度 $-\lambda$）の表面から導体1（線電荷密度 $+\lambda$）の表面までの電位差は

$$V = -\int_{d-a}^{a} E\,\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{d-a}^{a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right)\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln|r| - \ln|d-r|\right]_{d-a}^{a}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|\frac{r}{d-r}\right|\right]_{d-a}^{a} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\frac{a}{d-a}\right| - \ln\left|\frac{d-a}{a}\right|\right)$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{a}{d-a} - \ln\frac{d-a}{a}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\ln\frac{d-a}{a} - \ln\frac{d-a}{a}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-a}{a} + \ln\frac{d-a}{a}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot 2\ln\frac{d-a}{a}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

である。

平行2線の静電容量：一様分布

したがって、この場合の単位長さあたりの静電容量 C は

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{d}{a}-1\right)}$$

となる。ここで、$d \gg a$ とすると、平行2線の静電容量 C の近似式

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{d}{a}-1\right)} \cong \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{a}}$$

を得る。

$d = 2a$ のとき、2つの導体は接触するから、電位差が $V = 0$ になり、静電容量は $C \to \infty$ になるはずである。
これは、あくまで $d \gg a$ での近似である。

直線電荷のつくる電位：鏡像法

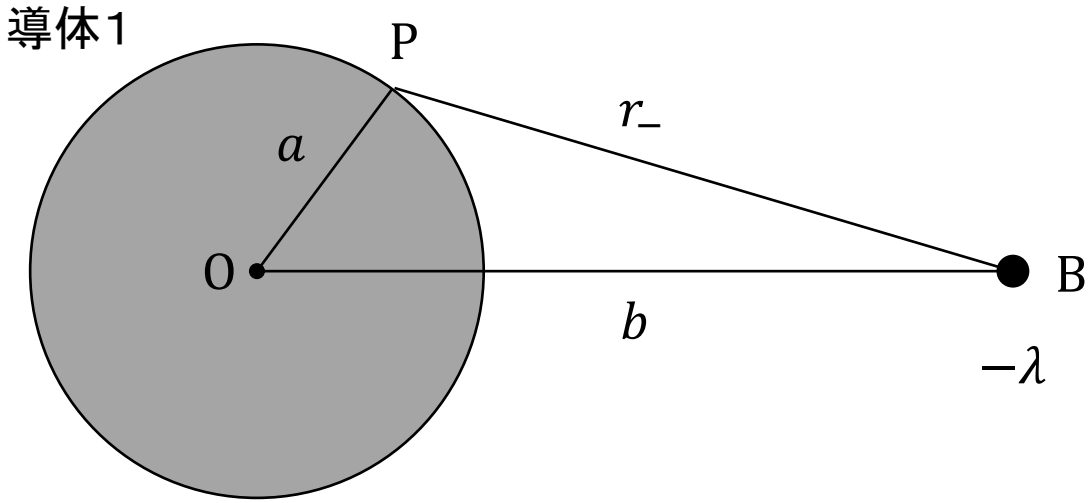
鏡像法を用いて、導体表面上の電荷の偏りを考慮した場合を考える。

半径 a の無限に長い円柱導体1が単位長さあたり λ の電荷をもつとき、その外部に、導体1の中心 O から距離 $b(>a)$ の位置 B に線電荷密度 $-\lambda$ の直線電荷をおく。この直線電荷が導体1の表面上の点 P につくる電位 V_- は、BP の距離を r_- とすると

$$V_- = -\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_0}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_0}$$

である。



直線電荷のつくる電位：鏡像法

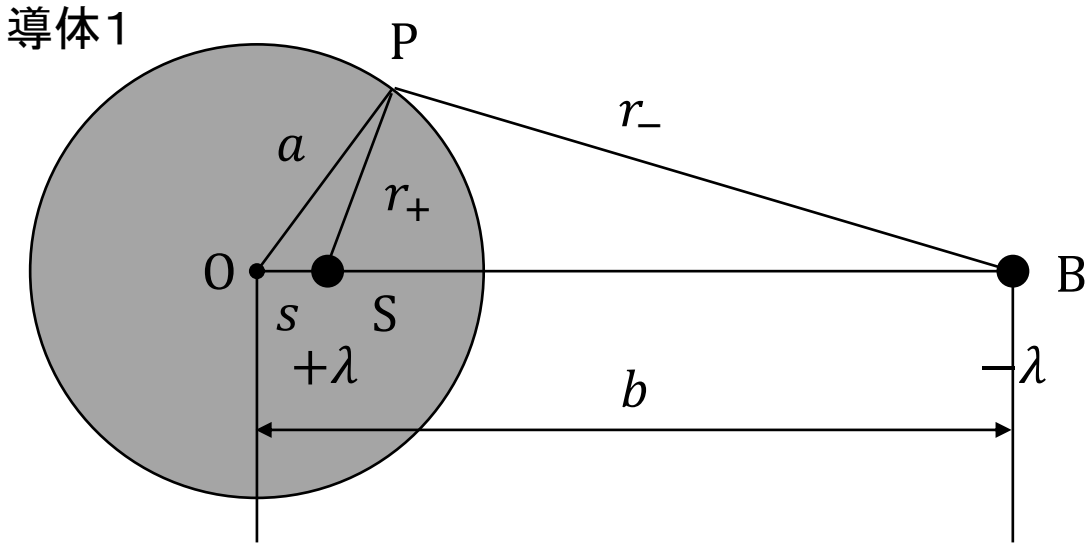
位置 B の直線電荷の鏡像電荷として、導体1の内部に、中心 O から距離 $s(<a)$ の位置 S に線電荷密度 $+\lambda$ の直線電荷をおく。この直線電荷が導体1の表面上の点 P につくる電位は、SP の距離を r_+ とすると

$$V_+ = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_+}{r_0}$$

である。このとき、点 P の電位は

$$\begin{aligned} V &= V_+ + V_- \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_+}{r_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_0} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_+} \end{aligned}$$

となる。



直線電荷のつくる電位：鏡像法

ここで、∠POB の大きさを θ とすると

$$r_- = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ba\cos\theta} = b\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\cos\theta}$$

$$r_+ = \sqrt{a^2 + s^2 - 2as\cos\theta}$$

だから、$s = \frac{a^2}{b}$ とすると

$$r_+ = \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2a\frac{a^2}{b}\cos\theta} = a\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\cos\theta}$$

より

$$\frac{r_-}{r_+} = \frac{b}{a} = \text{一定}$$

となる。すなわち、導体1の表面は等電位になる。

（別解）

$s = \frac{a^2}{b}$ とすると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OS}} = \frac{a}{s} = \frac{a}{a^2/b} = \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OP}}$$

であり、∠POB = ∠SOP だから
△ POB と △ SOP は相似である。
よって、

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{SP}} = \frac{r_-}{r_+} = \frac{b}{a}$$

2つの直線電荷のつくる電位が一定になるのは、2点 S, B からの距離の比が一定の点であり、その軌跡はアポロニウスの円である。

平行2線の鏡像電荷

導体1と導体2の互いの鏡像電荷が一致する条件は $b + s = d$ である。

$$s = \frac{a^2}{b}$$

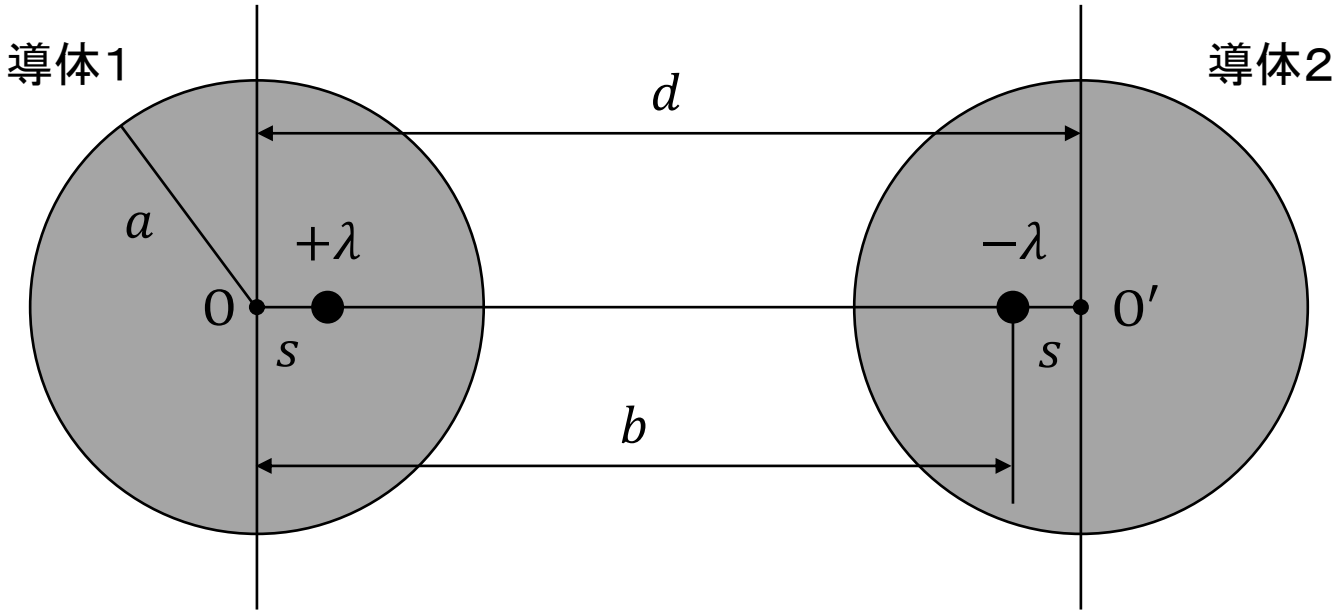
より

$$b + s = b + \frac{a^2}{b} = d$$

だから

$$b^2 - db + a^2 = 0$$

$$\therefore b = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2}$$



平行2線の鏡像電荷

これより

$$s = d - b = d - \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2} = \frac{d \mp \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2}$$

となる。ここで、$s < a < b$ だから

$$b = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2}$$

$$s = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2}$$

である。

$d = 2a$ のとき、$b = s = \frac{d}{2} = a$ となる。

$d \gg 2a$ のとき、$b = d, s = 0$ となる。

平行2線のつくる電場と電位差：鏡像法

したがって、導体表面上の電荷の偏りを考慮した場合、2線間で、導体1（単位長さあたりの電荷 $+\lambda$ ）の中心から距離 r の位置に、2本の導体がつくる電場は

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(r-s)} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0(r-b)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-s} + \frac{1}{b-r}\right)$$

であり、導体2（単位長さあたりの電荷 $-\lambda$）の表面から導体1（単位長さあたりの電荷 $+\lambda$）の表面までの電位差は

$$V = -\int_{d-a}^{a} E\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{d-a}^{a}\left(\frac{1}{r-s} + \frac{1}{b-r}\right)\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln|r-s| - \ln|b-r|\right]_{d-a}^{a}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|\frac{r-s}{b-r}\right|\right]_{d-a}^{a} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\frac{a-s}{b-a}\right| - \ln\left|\frac{(d-a)-s}{b-(d-a)}\right|\right)$$

平行2線のつくる電場と電位差：鏡像法

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\frac{a-s}{b-a}\right| - \ln\left|\frac{(d-s)-a}{a-(d-b)}\right|\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\frac{a-s}{b-a}\right| - \ln\left|\frac{b-a}{a-s}\right|\right)$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{a-s}{b-a} - \ln\frac{b-a}{a-s}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\ln\frac{b-a}{a-s} - \ln\frac{b-a}{a-s}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{b-a}{a-s} + \ln\frac{b-a}{a-s}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot 2\ln\frac{b-a}{a-s} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-a}{a-s}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-a}{a-\frac{a^2}{b}} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-a}{\frac{a}{b}(b-a)} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d+\sqrt{d^2-4a^2}}{2a}$$

である。

平行2線の静電容量：鏡像法

ここで、$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$ を用いると

$$V = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1} \right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$$

だから、鏡像法を用いて、導体表面上の電荷の偏りを考慮した場合の単位長さあたりの静電容量 C は

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$$

となる。

平行2線の静電容量：鏡像法

ここで、$d \gg a$ とすると、$x \gg 1$ のとき

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \cong \ln(2x)$$

であることから、単位長さあたりの静電容量は

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}\frac{d}{2a}} \cong \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$

となる。

平行2線の静電容量

導体表面の電荷が一様に分布している場合の平行2線の単位長さあたりの静電容量は

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a} - 1\right)}$$

である。いっぽう、鏡像法を用いて、導体表面上の電荷の偏りを考慮した場合の単位長さあたりの静電容量は

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}\frac{d}{2a}}$$

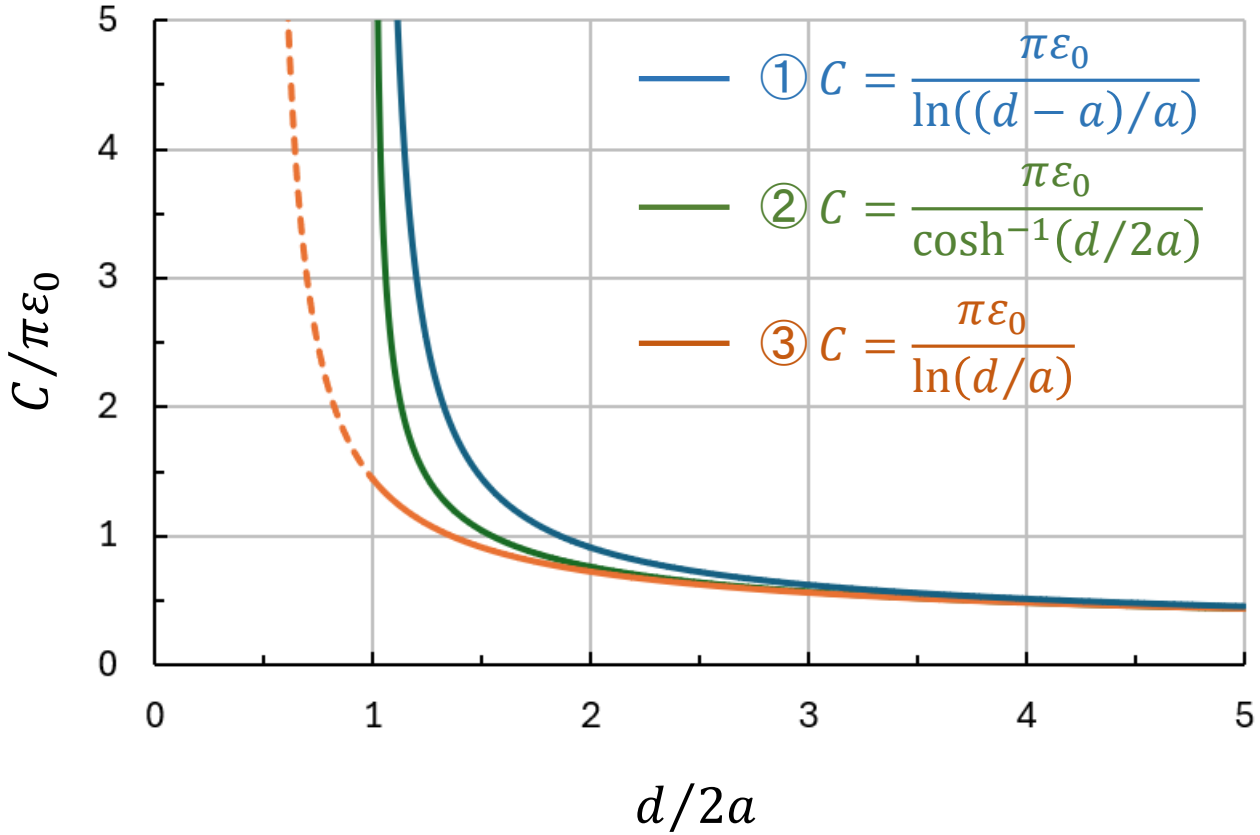
である。いずれの式も、$d \gg a$ とすると

$$C \cong \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$

となる。

平行2線の静電容量：比較

前ページに示した3つの式の比較を下図に示す。③式は、一様な電荷分布を仮定して求めた①式の近似であるにもかかわらず、$d/2a \gtrsim 2$ において、導体表面の電荷の偏りを考慮して鏡像法により求めた②式の良い近似になっている。



まとめ

半径 a の無限に長い円柱導体2本を、中心間隔 d で平行に配置したときの単位長さあたりの静電容量 C を、導体表面の電荷が一様に分布していると仮定して求めると、真空の誘電率を ε_0 として

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln((d-a)/a)}$$

である。これを $d \gg a$ として近似すると

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)}$$

を得る。この式は、一様な電荷分布を仮定して求めた解の近似であるにもかかわらず、導体表面の電荷の偏りを考慮して、鏡像法により求めた静電容量

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

の良い近似式になっている。

参考文献

- 後藤 憲一、山崎 修一郎(編)「詳解 電磁気学演習」共立出版、1970
- 砂川 重信「電磁気学」(岩波全書)岩波書店、1977
- 小口 武彦(編)「物理学B(電磁気学)」槇書店、1984
- 三好 旦六「光・電磁波論」培風館、1987
- 渡辺 征夫、青柳 晃「工科の物理 3 電磁気学」培風館、1991

謝辞

畏友の野辺川恭三君に感謝します。

付録

$y = \cosh^{-1} x$ とすると

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = x$$

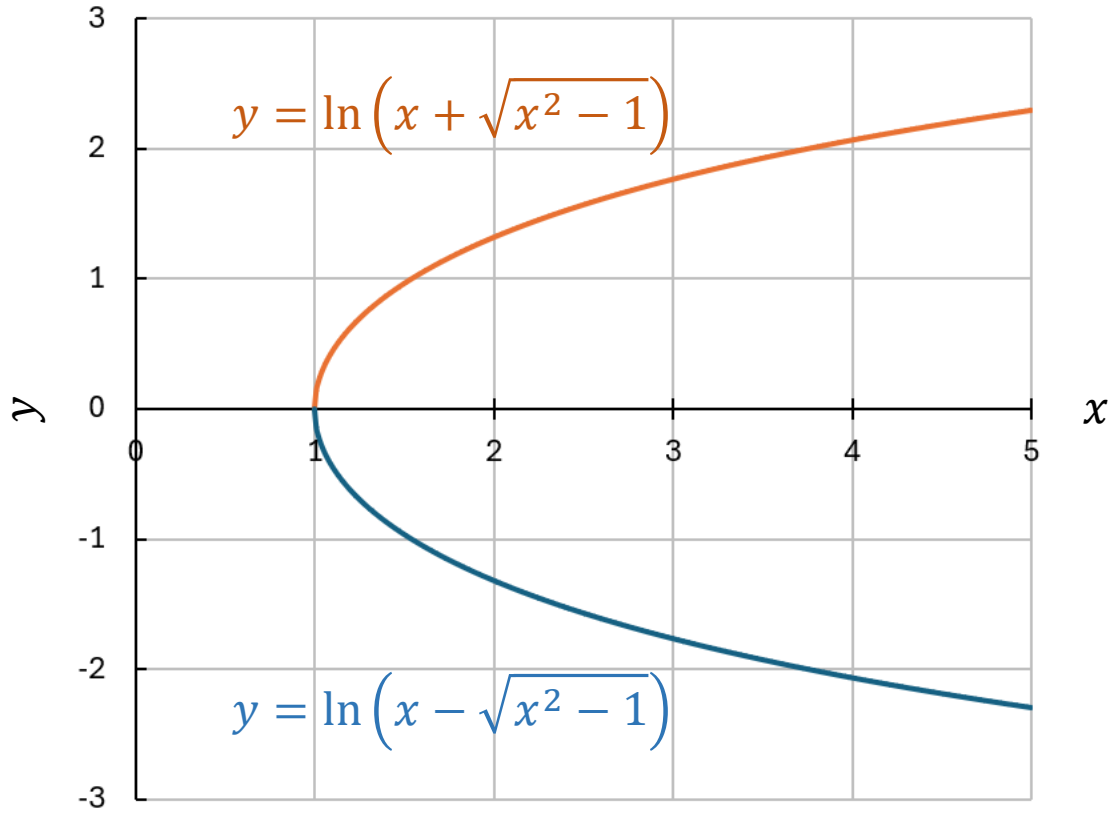
だから

$$e^{y} + e^{-y} = 2x$$

$$(e^{y})^{2} - 2xe^{y} + 1 = 0$$

$$e^{y} = x \pm \sqrt{x^{2} - 1}$$

$$\therefore y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^{2} - 1}\right)$$



ただし、$x \geq 1$ であり、$x = 1$ のとき $y = 0$ である。また、正号は $y > 0$、負号は $y < 0$ の解を表す。これより

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^{2} - 1}\right)$$

付録

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

だから

$$\cosh^{-1}x=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$