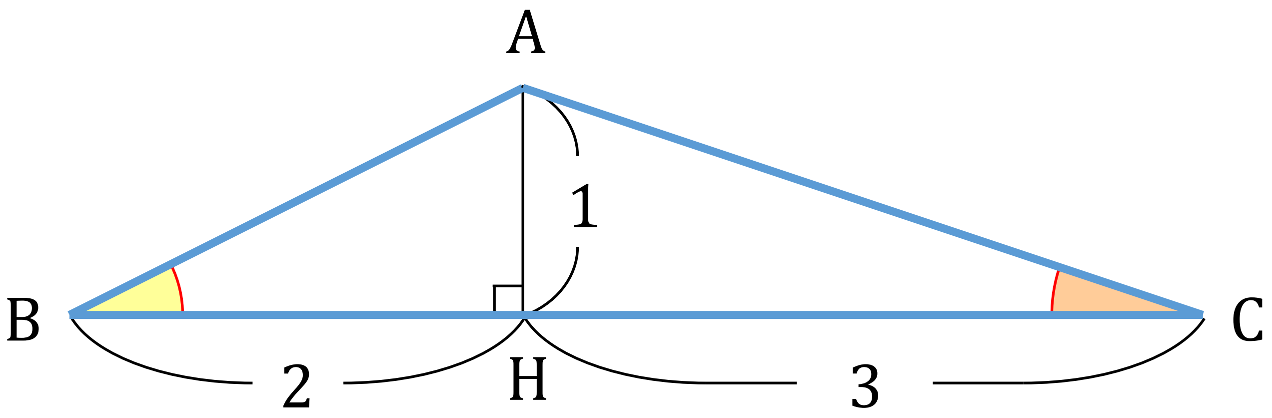
問題

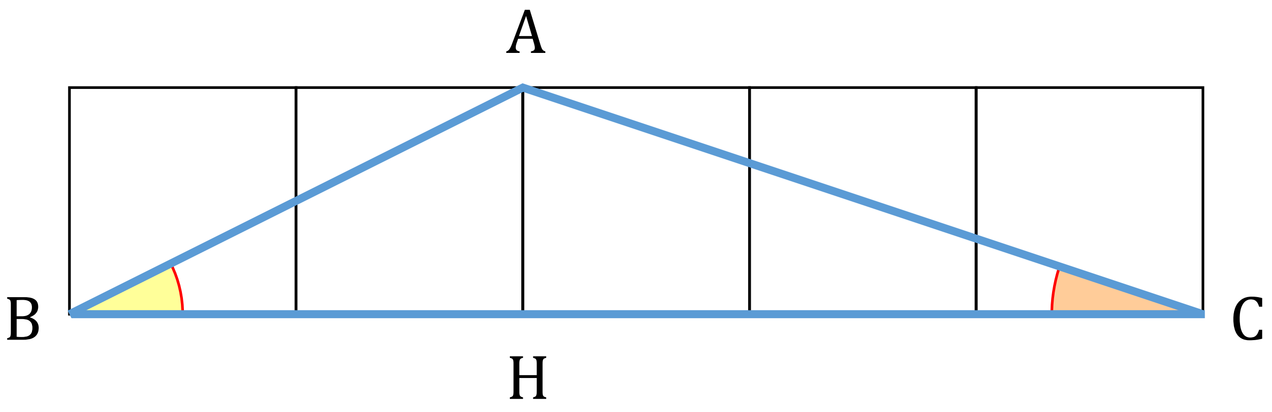
$\triangle$ ABC の頂点 A から辺 BC 上に垂線 AH を下ろしたら、
AH $=1$, BH $=2$, CH $=3$ であった。
このとき、$\angle$ABC $+$ $\angle$ACB の値を求めよ。



ヒント

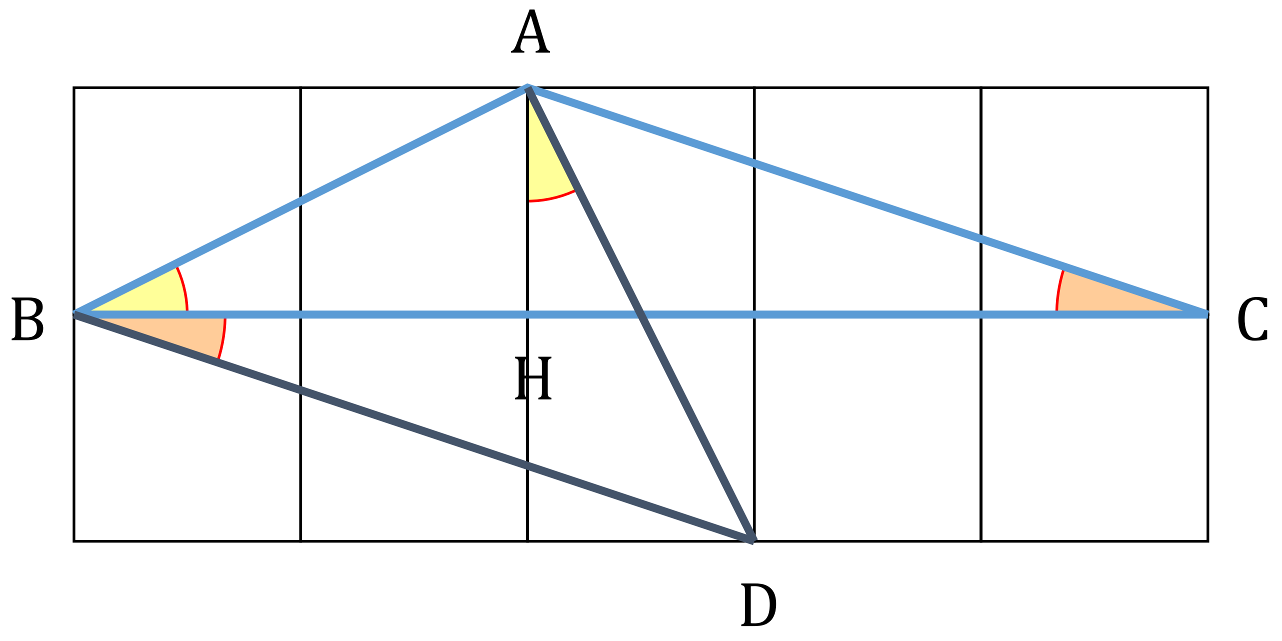
下図のような格子を描き加えてみる。
- 幾何的な解法：三角形の内角の和を使う
- 解析的な解法：三角関数を使う
- 代数的な解法：複素数を使う

の3つが考えられる。



幾何的な解法

下図のように△ ABDを作ると、$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DAH}$、$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{DBC}$である。
よって、$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BAH} + \angle \mathrm{DAH} = \angle \mathrm{BAH} + \angle \mathrm{ABC} = 90°$であり、
また、$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$だから、△ ABDは直角二等辺三角形である。
ゆえに、$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{ABD} = 45°$

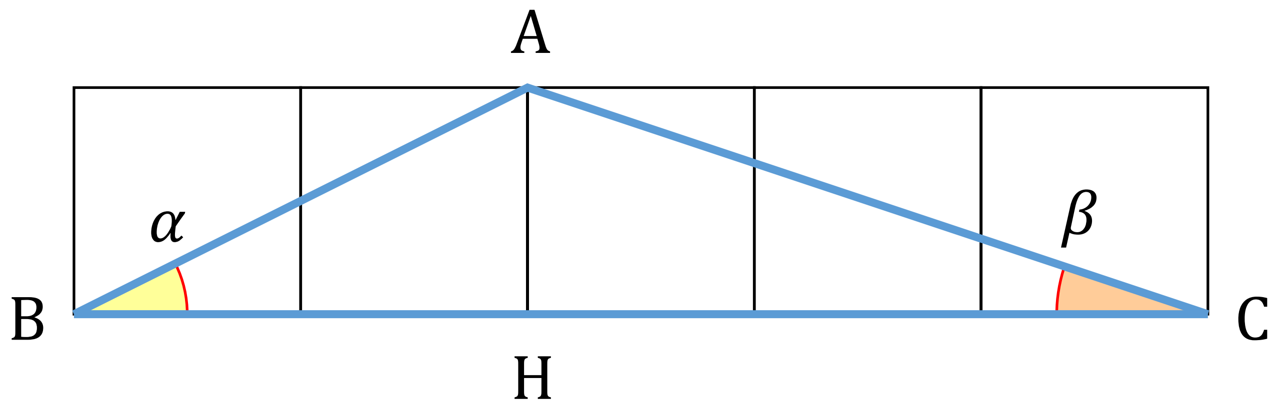


解析的な解法

$\angle \mathrm{ABC} = \alpha, \angle \mathrm{ACB} = \beta$ とすると、正接関数の加法定理より

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

$$\therefore \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB} = \alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = 45°$$



代数的な解法

$\angle \mathrm{ABC} = \alpha, \angle \mathrm{ACB} = \beta$ とすると

$$\alpha + \beta = \mathrm{Arg}(2+i) + \mathrm{Arg}(3+i) = \mathrm{Arg}\big((2+i)(3+i)\big)$$

$$= \mathrm{Arg}(5+5i)$$

$$\therefore \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB} = \alpha + \beta = \mathrm{Arg}(5+5i) = 45^\circ$$