鹿児島大学　渡邉研究室
wata104@eee

累乗和の公式の計算方法（級数形式）

1. 累乗和の公式

　1 から n までの n 個の自然数の m 乗の和

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} k^m$$

は、$m-1$ 以下の S_j（$0 \le j \le m-1$）を用いて表される。これより、低次の S_j から順次計算していくことで、所望の m について S_m を求める公式を導くことができる。その際、通常の方法では、$j \le m-1$ 以下の S_j をすべて計算に用いる必要がある。

　いっぽう、累乗和の公式は、積分を用いて求めることもできる。この方法では、S_{m-1} のみを用いて S_m を求めることができる。

2. 積分による累乗和の公式の導出方法

　1 から n までの n 個の自然数の m 乗和 S_m は n の多項式である。それを

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{l=1}^{m+1} a_{ml} n^l = f_m(n)$$

と表し、$f_m(x)$ は変数 x の連続関数であるとする。このとき、

$$F_m(n) = \int_0^n f_m(x)dx = \int_0^n \sum_{l=1}^{m+1} a_{ml} x^l \, dx = \sum_{l=1}^{m+1} \frac{a_{ml}}{l+1} n^{l+1} = \sum_{l=2}^{m+2} b_{ml} n^l$$

を用いて、$(m+1)$ 乗和 S_{m+1} を

$$S_{m+1} = (m+1)F_m(n) + B_{m+1}n = B_{m+1}n + (m+1)\sum_{l=2}^{m+2} b_{ml} n^l$$

より求めることができる。定数 B_{m+1} は、$n=1$ のとき

$$S_{m+1} = B_{m+1} + (m+1)\sum_{l=2}^{m+2} b_{ml} = 1$$

となることより定めればよい。

3. 積分による導出方法の証明

$$S_{m+1} = (m+1)F_m(n) + B_{m+1}n$$

より

$$f_{m+1}(x) = (m+1)F_m(x) + B_{m+1}x = (m+1)\int_0^x f_m(t)dt + B_{m+1}x$$

が成り立つとき、

$$\frac{d}{dx} f_{m+1}(x) = (m+1) f_m(x) + B_{m+1}$$

である。以下、これを数学的帰納法により証明する。

　まず、$m=0$ のときは

$$\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)=x+\frac{1}{2}$$

$$f_0(x)=x$$

より

$$B_1=\frac{1}{2}$$

とおけば、

$$\frac{d}{dx}f_1(x)=1\cdot f_0(x)+B_1$$

が成り立つ。

次に、$0\leq m\leq p$ において

$$\frac{d}{dx}f_{m+1}(x)=(m+1)f_m(x)+B_{m+1}$$

が成り立つとする。恒等式

$$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}{}_{m+1}C_j k^j$$

より、$m\geq 1$ に対して

$$S_m=\frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1}-1-\sum_{j=0}^{m-1}{}_{m+1}C_j S_j\right)=f_m(n)$$

が得られることを用いると、

$$f_{p+2}(x)=\frac{1}{p+3}\left((x+1)^{p+3}-1-\sum_{j=0}^{p+1}{}_{p+3}C_j f_j(x)\right)$$

$$=\frac{1}{p+3}\left((x+1)^{p+3}-1-x-\sum_{j=1}^{p+1}{}_{p+3}C_j f_j(x)\right)$$

となる。これを微分すると

$$\frac{d}{dx}f_{p+2}(x)=\frac{1}{p+3}\frac{d}{dx}\left((x+1)^{p+3}-1-x-\sum_{j=1}^{p+1}{}_{p+3}C_j f_j(x)\right)$$

$$=\frac{1}{p+3}\left((p+3)(x+1)^{p+2}-1-\sum_{j=1}^{p+1}{}_{p+3}C_j\frac{d}{dx}f_j(x)\right)$$

$$=(x+1)^{p+2}-\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+3}\sum_{j=1}^{p+1}{}_{p+3}C_j\frac{d}{dx}f_j(x)$$

となるが、仮定より $1 \le j \le p+1$ において

$$\frac{d}{dx}f_j(x) = jf_{j-1}(x) + B_j$$

が成り立つことから

$$\frac{d}{dx}f_{p+2}(x) = (x+1)^{p+2} - \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+3}\sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j\left(jf_{j-1}(x) + B_j\right)$$

$$= (x+1)^{p+2} - \frac{1}{p+3}\sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j jf_{j-1}(x) - \frac{1}{p+3}\left(1 + \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j B_j\right)$$

である。ここで、

$${}_{p+3}C_j j = \frac{(p+3)!}{(p+3-j)!\,j!}j = \frac{(p+3)(p+2)!}{\left(p+2-(j-1)\right)!\,(j-1)!} = (p+3)\,{}_{p+2}C_{j-1}$$

であるから

$$\frac{d}{dx}f_{p+2}(x) = (x+1)^{p+2} - \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+2}C_{j-1}f_{j-1}(x) - \frac{1}{p+3}\left(1 + \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j B_j\right)$$

$$= \left((x+1)^{p+2} - 1 - \sum_{j=0}^{p} {}_{p+2}C_j f_j(x)\right) + 1 - \frac{1}{p+3}\left(1 + \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j B_j\right)$$

$$= (p+2)f_{p+1}(x) + 1 - \frac{1}{p+3}\left(1 + \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j B_j\right)$$

となる。したがって、

$$B_{p+2} = 1 - \frac{1}{p+3}\left(1 + \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j B_j\right)$$

とおけば

$$\frac{d}{dx}f_{p+2}(x) = (p+2)f_{p+1}(x) + B_{p+2}$$

となり、$m = p+1$ においても与式が成り立つ。

　なお、

$$B_{p+2} = 1 - \frac{1}{p+3}\left(1 + \sum_{j=1}^{p+1} {}_{p+3}C_j B_j\right)$$

において、$B_0 = 1$ とすれば

$$B_{p+2}=1-\frac{1}{p+3}\sum_{j=0}^{p+1}{}_{p+3}C_jB_j$$

となる。これは

$$1-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{0}{}_2C_jB_j=1-\frac{1}{2}B_0=1-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}=B_1$$

より、$p=-1$ でも成り立つ。したがって、$m\geq 0$ に対して

$$B_{m+1}=1-\frac{1}{m+2}\sum_{j=0}^{m}{}_{m+2}C_jB_j$$

である。

4. 積分による導出方法の証明の別表現

上記の数学的帰納法による証明において、恒等式

$$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}{}_{m+1}C_jk^j$$

の代わりに

$$(k+1)^{m+1}-(k-1)^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}\left(1+(-1)^{m-j}\right)_{m+1}C_jk^j$$

を用いると、$m\geq 1$ に対して

$$S_m=\frac{1}{2(m+1)}\left((n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1-\sum_{j=0}^{m-1}\left(1+(-1)^{m-j}\right)_{m+1}C_jS_j\right)$$

が得られる。これより

$$f_{p+2}(x)=\frac{1}{2(p+3)}\left((x+1)^{p+3}+x^{p+3}-1-\sum_{j=0}^{p+1}\left(1+(-1)^{p+2-j}\right)_{p+3}C_jf_j(x)\right)$$

であり、以下、同様にして、

$$B_{p+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(p+3)}\sum_{j=0}^{p+1}\left(1+(-1)^{p+2-j}\right)_{p+3}C_jB_j$$

となる。これは

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2}\sum_{j=0}^{0}\left(1+(-1)^{1-j}\right){}_2C_jB_j=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}=B_1$$

より、$p=-1$ でも成り立つ。したがって、$m\geq 0$ に対して

$$B_{m+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(m+2)} \sum_{j=0}^{m} \left(1 + (-1)^{m+1-j}\right)_{m+2}C_j B_j$$

である。これは、$m+1$ が偶数（m が奇数）のとき、右辺の総和に j が奇数の項は含まれないことを示す。また、$m+1$ が奇数（m が偶数）のときは、右辺の総和に j が偶数の項は含まれない。ここで、$B_1 = 1/2$ より

$$B_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \sum_{j=0}^{2} \left(1 + (-1)^{3-j}\right) {}_4C_j B_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

であり、$m+1$ が奇数のとき

$$\begin{aligned} B_{m+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(m+2)} \sum_{j=0}^{m} \left(1 + (-1)^{m+1-j}\right)_{m+2}C_j B_j \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(m+2)} \cdot 2(m+2) B_1 - \frac{1}{2(m+2)} \sum_{j=2}^{m} \left(1 + (-1)^{m+1-j}\right)_{m+2}C_j B_j \\ &= -\frac{1}{2(m+2)} \sum_{j=2}^{m} \left(1 + (-1)^{m+1-j}\right)_{m+2}C_j B_j \end{aligned}$$

であるから、$m+1 \geq 3$ 以上の奇数に対して $B_{m+1} = 0$（つまり、$q \geq 3$ 以上の奇数に対して $B_q = 0$）となることがわかる。

5. 計算例

以下、$m=2$ から $m=10$ の場合について、積分により累乗和 S_m の公式を導出する。

(a) 2 乗和

$$S_1=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=f_1(n)$$

より

$$F_1(n)=\int_0^n f_1(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

であるから

$$S_2=2F_1(n)+B_2n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+B_2n$$

となる。ここで、$n=1$ のとき

$$S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+B_2=\frac{5}{6}+B_2=1$$

より

$$B_2=\frac{1}{6}$$

であるから

$$S_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_2=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

となる。

(b) 3 乗和

$$S_2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=f_2(n)$$

より

$$F_2(n)=\int_0^n f_2(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x\right)dx=\frac{1}{12}n^4+\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{12}n^2$$

であるから

$$S_3=3F_2(n)+B_3n=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+B_3n$$

となる。ここで、$n = 1$ のとき

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + B_3 = 1 + B_3 = 1$$

より

$$B_3 = 0$$

であるから

$$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_3 = \frac{1}{4}n^2(n^2 + 2n + 1)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

となる。

(c) 4 乗和

$$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = f_3(n)$$

より

$$F_3(n) = \int_0^n f_3(x)dx = \int_0^n \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{20}n^5 + \frac{1}{8}n^4 + \frac{1}{12}n^3$$

であるから

$$S_4 = 4F_3(n) + B_4 n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + B_4 n$$

となる。ここで、$n = 1$ のとき

$$S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + B_4 = \frac{6 + 15 + 10}{30} + B_4 = \frac{31}{30} + B_4 = 1$$

より

$$B_4 = -\frac{1}{30}$$

であるから

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_4 = \frac{1}{30}n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

$$= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

となる。

(d) 5 乗和

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = f_4(n)$$

より

$$F_4(n) = \int_0^n f_4(x)dx = \int_0^n \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x\right)dx = \frac{1}{30}n^6 + \frac{1}{10}n^5 + \frac{1}{12}n^4 - \frac{1}{60}n^2$$

であるから

$$S_5 = 5F_4(n) + B_5 n = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 + B_5 n$$

となる。ここで、$n = 1$ のとき

$$S_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + B_5 = \frac{2 + 6 + 5 - 1}{12} + B_5 = 1 + B_5 = 1$$

より

$$B_5 = 0$$

であるから

$$S_5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_5 = \frac{1}{12}n^2(2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)(2n^3 + 4n^2 + n - 1)$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

となる。

(e) 6 乗和

$$S_5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = f_5(n)$$

より

$$F_5(n)=\int_0^n f_5(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2\right)dx=\frac{1}{42}n^7+\frac{1}{12}n^6+\frac{1}{12}n^5-\frac{1}{36}n^3$$

であるから

$$S_6=6F_5(n)+B_6n=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+B_6n$$

となる。ここで、$n=1$ のとき

$$S_6=\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+B_6=1-\frac{1}{42}+B_6=1$$

より

$$B_6=\frac{1}{42}$$

であるから

$$S_6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_6=\frac{1}{42}n(6n^6+21n^5+21n^4-7n^2+1)$$

$$=\frac{1}{42}n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)$$

$$=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

となる。

(f) 7 乗和

$$S_6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n=f_6(n)$$

より

$$F_6(n)=\int_0^n f_6(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{56}n^8+\frac{1}{14}n^7+\frac{1}{12}n^6-\frac{1}{24}n^4+\frac{1}{84}n^2$$

であるから

$$S_7=7F_6(n)+B_7n=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2+B_7n$$

となる。ここで、$n=1$ のとき

$$S_7=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{7}{24}+\frac{1}{12}+B_7=\frac{3+12+14-7+2}{24}+B_7=1+B_7=1$$

より

$$B_7 = 0$$

であるから

$$S_7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_7 = \frac{1}{24}n^2(3n^6 + 12n^5 + 14n^4 - 7n^2 + 2)$$

$$= \frac{1}{24}n^2(n+1)(3n^5 + 9n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 2n + 2)$$

$$= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

となる。

(g) 8 乗和

$$S_7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 = f_7(n)$$

より

$$F_7(n) = \int_0^n f_7(x)dx = \int_0^n \left(\frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{72}n^9 + \frac{1}{16}n^8 + \frac{1}{12}n^7 - \frac{7}{120}n^5 + \frac{1}{36}n^3$$

であるから

$$S_8 = 8F_7(n) + B_8 n = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 + B_8 n$$

となる。ここで、$n = 1$ のとき

$$S_8 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} + B_8 = \frac{10 + 45 + 60 - 42 + 20}{90} + B_8 = \frac{93}{90} + B_8 = \frac{31}{30} + B_8 = 1$$

より

$$B_8 = -\frac{1}{30}$$

であるから

$$S_8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_8 = \frac{1}{90}n(10n^8 + 45n^7 + 60n^6 - 42n^4 + 20n^2 - 3)$$

$$= \frac{1}{90} n(n+1)(10n^7 + 35n^6 + 25n^5 - 25n^4 - 17n^3 + 17n^2 + 3n - 3)$$

$$= \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)$$

となる。

(h) 9 乗和

$$S_8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n = f_8(n)$$

より

$$F_8(n) = \int_0^n f_8(x)dx = \int_0^n \left(\frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{90}n^{10} + \frac{1}{18}n^9 + \frac{1}{12}n^8 - \frac{7}{90}n^6 + \frac{1}{18}n^4 - \frac{1}{60}n^2$$

であるから

$$S_9 = 9F_8(n) + B_9 n = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 + B_9 n$$

となる。ここで、$n = 1$ のとき

$$S_9 = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10} + \frac{1}{2} - \frac{3}{20} + B_9 = 1 + \frac{2 + 15 - 14 - 3}{20} + B_9 = 1 + B_9 = 1$$

より

$$B_9 = 0$$

であるから

$$S_9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_9 = \frac{1}{20}n^2(2n^8 + 10n^7 + 15n^6 - 14n^4 + 10n^2 - 3)$$

$$= \frac{1}{20}n^2(n+1)(2n^7 + 8n^6 + 7n^5 - 7n^4 - 7n^3 + 7n^2 + 3n - 3)$$

$$= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6 + 6n^5 + n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n - 3)$$

となる。

(i) 10 乗和

$$S_9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 = f_9(n)$$

より

$$F_9(n)=\int_0^n f_9(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{2}x^9+\frac{3}{4}x^8-\frac{7}{10}x^6+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{20}x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{110}n^{11}+\frac{1}{20}n^{10}+\frac{1}{12}n^9-\frac{1}{10}n^7+\frac{1}{10}n^5-\frac{1}{20}n^3$$

であるから

$$S_{10}=10F_9(n)+B_{10}n=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+B_9n$$

となる。ここで、$n=1$ のとき

$$S_{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-1+1-\frac{1}{2}+B_{10}=\frac{6+55}{66}+B_9=\frac{61}{66}+B_9=1$$

より

$$B_{10}=\frac{5}{66}$$

であるから

$$S_{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_{10}=\frac{1}{66}n(6n^{10}+33n^9+55n^8-66n^6+66n^4-33n^2+5)$$

$$=\frac{1}{66}n(n+1)(6n^9+27n^8+28n^7-28n^6-38n^5+38n^4+28n^3-28n^2-5n+5)$$

$$=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$

となる。

(j) 11 乗和

$$S_{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n=f_{10}(n)$$

より

$$F_{10}(n)=\int_0^n f_{10}(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9-x^7+x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{66}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{132}n^{12}+\frac{1}{22}n^{11}+\frac{1}{12}n^{10}-\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{6}n^6-\frac{1}{8}n^4+\frac{5}{132}n^2$$

であるから

$$S_{11}=11F_{10}(n)+B_{11}n=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^8+\frac{11}{6}n^6-\frac{11}{8}n^4+\frac{5}{12}n^2+B_{11}n$$

となる。ここで、$n=1$ のとき

$$S_{11}=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{11}{12}-\frac{11}{8}+\frac{11}{6}-\frac{11}{8}+\frac{5}{12}+B_{11}=\frac{2+12+22-33+44-33+10}{24}+B_{11}$$

$$=\frac{2+12+10+(22+44-33-33)}{24}+B_{11}=\frac{24}{24}+B_{11}=1$$

より

$$B_{11}=0$$

であるから

$$S_{11}=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^{8}+\frac{11}{6}n^{6}-\frac{11}{8}n^{4}+\frac{5}{12}n^{2}$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_{11}=\frac{1}{24}n^2(2n^{10}+12n^9+22n^8-33n^6+44n^4-33n^2+10)$$

$$=\frac{1}{24}n^2(n+1)(2n^9+10n^8+12n^7-12n^6-21n^5+21n^4+23n^3-23n^2-10n+10)$$

$$=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10)$$

となる。

(k) 12 乗和

$$S_{11}=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^{8}+\frac{11}{6}n^{6}-\frac{11}{8}n^{4}+\frac{5}{12}n^{2}=f_{11}(n)$$

より

$$F_{11}(n)=\int_0^n f_{11}(x)dx=\int_0^n\left(\frac{1}{12}x^{12}+\frac{1}{2}x^{11}+\frac{11}{12}x^{10}-\frac{11}{8}x^{8}+\frac{11}{6}x^{6}-\frac{11}{8}x^{4}+\frac{5}{12}x^{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{156}n^{13}+\frac{1}{24}n^{12}+\frac{1}{12}n^{11}-\frac{11}{72}n^{9}+\frac{11}{42}n^{7}-\frac{11}{40}n^{5}+\frac{5}{36}n^{3}$$

であるから

$$S_{12}=12F_{11}(n)+B_{12}n=\frac{1}{13}n^{13}+\frac{1}{2}n^{12}+n^{11}-\frac{11}{6}n^{9}+\frac{22}{7}n^{7}-\frac{33}{10}n^{5}+\frac{5}{3}n^{3}+B_{12}n$$

となる。ここで、$n=1$ のとき

$$S_{12}=\frac{1}{13}+\frac{1}{2}+1-\frac{11}{6}+\frac{22}{7}-\frac{33}{10}+\frac{5}{3}+B_{12}$$

$$=1+\frac{1}{13}+\frac{1}{2}+\left(\frac{22}{7}-\frac{33}{10}\right)+\left(\frac{5}{3}-\frac{11}{6}\right)+B_{12}=1+\frac{1}{13}+\frac{1}{2}+\frac{220-231}{70}-\frac{1}{6}+B_{12}$$

$$=1+\frac{1}{13}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{11}{70}+B_{12}=1+\frac{1}{13}+\frac{1}{3}-\frac{11}{70}+B_{12}$$

$$= 1 + \frac{210 + 910 - 429}{2730} + B_{12} = 1 + \frac{1120 - 429}{2730} + B_{12} = 1 + \frac{691}{2730} + B_{12}$$

より

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

であるから

$$S_{12} = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n$$

を得る。これを因数分解すれば

$$S_{12} = \frac{1}{2730}n(210n^{12} + 1365n^{11} + 2730n^{10} - 5005n^8 + 8580n^6 - 9009n^4 + 4550n^2 - 691)$$

$$= \frac{1}{2730}n(n+1)(210n^{11} + 1155n^{10} + 1575n^9 - 1575n^8 - 3430n^7 + 3430n^6 + 5150n^5$$
$$- 5150n^4 - 3859n^3 + 3859n^2 + 691n - 691)$$

$$= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10} + 525n^9 + 525n^8 - 1050n^7 - 1190n^6 + 2310n^5$$
$$+ 1420n^4 - 3285n^3 - 287n^2 + 2073n - 691)$$

となる。

6. まとめ

1 から n までの n 個の自然数の m 乗の和 S_m の公式は、積分により導くことができる。この方法によれば、S_{m-1} のみを用いて S_m を求めることができる。その証明において、恒等式

$$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}{}_{m+1}C_j k^j$$

の代わりに

$$(k+1)^{m+1}-(k-1)^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j k^j$$

を用いることで、S_m を n の多項式 $f_m(n)$ で表したとき、n の 1 次の項の係数 B_m は、$m \geq 3$ 以上の奇数に対して $B_m=0$ となることを示した。

参考文献

・遠山 啓「代数入門　数と式」ちくま学芸文庫、2016（遠山 啓「数と式ー代数入門（リフレッシュ数学 1)」講談社、1980）
・小谷 健司「累乗和の公式について」イプシロン、vol. 51、pp. 43-52、2009
・杉山 康恭、遠藤 良樹「累乗和の公式導出の簡単化と諸性質」沼津工業専門学校研究報告、vol. 53、pp. 57-63、2019

付録：公式一覧

累乗和の公式を、以下にまとめて示す。

(1) 因数分解形式（整係数）

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \sum_{k=1}^{n} k^{10} \\ &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5) \end{aligned}$$

$$S_{11} = \sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10)$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \sum_{k=1}^{n} k^{12} \\ &= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5 \\ &\qquad +1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691) \end{aligned}$$

(2) 因数分解形式（分数係数）

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2+n-\frac{1}{3}\right)$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}n^2(n+1)^2\left(n^2+n-\frac{1}{2}\right)$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{7}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^4+2n^3-n+\frac{1}{3}\right)$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}n^2(n+1)^2\left(n^4+2n^3-\frac{1}{3}n^2-\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}\right)$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{9}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^6+3n^5+n^4-3n^3-\frac{1}{5}n^2+\frac{9}{5}n-\frac{3}{5}\right)$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{10}n^2(n+1)^2\left(n^6+3n^5+\frac{1}{2}n^4-4n^3+\frac{1}{2}n^2+3n-\frac{3}{2}\right)$$

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{n} k^{10}$$

$$= \frac{1}{11}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^8+4n^7+\frac{8}{3}n^6-6n^5-\frac{10}{3}n^4+8n^3+\frac{2}{3}n^2-5n+\frac{5}{3}\right)$$

$$S_{11} = \sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\left(n^8+4n^7+2n^6-8n^5+\frac{5}{2}n^4+13n^3-\frac{3}{2}n^2-10n+5\right)$$

$$S_{12} = \sum_{k=1}^{n} k^{12}$$

$$= \frac{1}{13}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^{10}+5n^9+5n^8-10n^7-\frac{34}{3}n^6+22n^5+\frac{284}{21}n^4-\frac{219}{7}n^3-\frac{41}{15}n^2\right.$$

$$\left.+\frac{691}{35}n-\frac{691}{105}\right)$$

(3) 級数形式

$$S_0=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

$$S_4=\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

$$S_5=\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$

$$S_6=\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n$$

$$S_7=\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2$$

$$S_8=\sum_{k=1}^{n}k^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n$$

$$S_9=\sum_{k=1}^{n}k^9=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2$$

$$S_{10}=\sum_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n$$

$$S_{11}=\sum_{k=1}^{n}k^{11}=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^8+\frac{11}{6}n^6-\frac{11}{8}n^4+\frac{5}{12}n^2$$

$$S_{12}=\sum_{k=1}^{n}k^{12}=\frac{1}{13}n^{13}+\frac{1}{2}n^{12}+n^{11}-\frac{11}{6}n^9+\frac{22}{7}n^7-\frac{33}{10}n^5+\frac{5}{3}n^3-\frac{691}{2730}n$$