鹿児島大学　渡邉研究室
wata104@eee

累乗和の公式の計算方法（因数分解形式）

1. 累乗和の公式

1 から n までの n 個の自然数の m 乗の和

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} k^m$$

は、$m-1$ 以下の S_j（$0 \le j \le m-1$）を用いて表される。これより、低次の S_j から順次計算していくことで、所望の m について S_m を求める公式を導くことができる。その際、通常の方法では、$j \le m-1$ 以下の S_j をすべて計算に用いる必要がある。

本稿では、m が奇数のときは $j \le m-2$ 以下の奇数次の S_j のみ、m が偶数のときは $j \le m-2$ 以下の偶数次の S_j のみを用いて計算する方法を示す。この方法では、累乗和の公式を導く際に用いる S_j の項の数を半分に減らすことができる。

2. 通常の計算方法

S_m を求める公式は、通常、次の方法により導出される。

まず、恒等式

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \left(\sum_{j=0}^{m+1} {}_{m+1}C_j k^j \right) - k^{m+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} {}_{m+1}C_j k^j$$

を考え、これの $k=1$ から $k=n$ までの和をとると、左辺は隣り合う項がほとんど打ち消し合うから

$$(n+1)^{m+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} {}_{m+1}C_j k^j$$

が成り立つ。右辺の総和の順序を入れ替えると

$$(n+1)^{m+1} - 1 = \sum_{j=0}^{m} \left({}_{m+1}C_j \sum_{k=1}^{n} k^j \right) = \sum_{j=0}^{m} {}_{m+1}C_j S_j$$

となり、S_m（$j=m$）を総和から分離すると

$$(n+1)^{m+1} - 1 = \sum_{j=0}^{m-1} {}_{m+1}C_j S_j + (m+1) S_m$$

$$\therefore S_m = \frac{1}{m+1} \left((n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{j=0}^{m-1} {}_{m+1}C_j S_j \right)$$

を得る。これより、$m-1$ 以下の S_j（$0 \le j \le m-1$）を用いて S_m を求めることができるが、その際に $m-1$ 以下の S_j をすべて用いる必要がある。

3. 改良した計算方法

まず、恒等式

$$(k+1)^{m+1}-(k-1)^{m+1}=\left(\sum_{j=0}^{m+1}{}_{m+1}C_j k^j\right)-\left(\sum_{j=0}^{m+1}{}_{m+1}C_j(-1)^{m+1-j}k^j\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{m}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j k^j$$

を考え、これの $k=1$ から $k=n$ までの和をとると、左辺は隣り合う項がほとんど打ち消し合うから

$$(n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1=\sum_{j=0}^{m}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j k^j$$

が成り立つ。右辺の総和の順序を入れ替えると

$$(n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1=\sum_{j=0}^{m}\left(\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j\sum_{k=1}^{n}k^j\right)=\sum_{j=0}^{m}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j S_j$$

となり、S_m（$j=m$）を総和から分離すると

$$(n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1=\sum_{j=0}^{m-1}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j S_j+2(m+1)S_m$$

$$\therefore S_m=\frac{1}{2(m+1)}\left((n+1)^{m+1}+n^{m+1}-1-\sum_{j=0}^{m-1}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j S_j\right)$$

を得る。これより、$m-1$ 以下の S_j（$0\leq j\leq m-1$）を用いて S_m を求めることができる。ここで、総和の中の $1+(-1)^{m-j}$ は、m が奇数の場合は

$$1+(-1)^{m-j}=\begin{cases}2 & (j\text{ が奇数})\\ 0 & (j\text{ が偶数})\end{cases}$$

であるから、偶数次の S_j は消える。また、m が偶数の場合は

$$1+(-1)^{m-j}=\begin{cases}0 & (j\text{ が奇数})\\ 2 & (j\text{ が偶数})\end{cases}$$

であるから、奇数次の S_j は消える。したがって、この計算式では、通常の計算に比べて、右辺に現れる S_j の項の数が半分になっている。

4. 計算の比較

$m=3$ の場合について、通常の計算方法と改良した計算方法を比較する。

(a) 通常の計算方法

$$(k+1)^4-k^4=(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)-k^4$$
$$=4k^3+6k^2+4k+1$$

より

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=4S_3+6S_2+4S_1+S_0$$
$$\therefore 4S_3=(n+1)^4-1-6S_2-4S_1-S_0$$

ここで、

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$S_1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$S_0=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

を用いて

$$4S_3=(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$
$$=(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n$$
$$=(n^4+4n^3+6n^2+3n)-n(n+1)\big((2n+1)+2\big)$$
$$=n(n^3+4n^2+6n+3)-n(n+1)(2n+3)$$
$$=n(n+1)(n^2+3n+3)-n(n+1)(2n+3)$$
$$=n(n+1)\big((n^2+3n+3)-(2n+3)\big)$$
$$=n(n+1)(n^2+n)$$
$$=n^2(n+1)^2$$
$$\therefore S_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(b) 改良した計算方法

$$(k+1)^4-(k-1)^4=(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)-(k^4-4k^3+6k^2-4k+1)$$
$$=2(4k^3+4k)$$

より

$$(n+1)^4+n^4-1=2\left(4\sum_{k=1}^{n}k^3+4\sum_{k=1}^{n}k\right)=2(4S_3+4S_1)$$

$$\therefore 4S_3 = \frac{1}{2}((n+1)^4 + n^4 - 1) - 4S_1$$

ここで、

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

を用いて

$$4S_3 = \frac{1}{2}((n+1)^4 + n^4 - 1) - 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\big((n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + n^4 - 1\big) - 2n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n) - 2n(n+1)$$

$$= n(n^3 + 2n^2 + 3n + 2) - 2n(n+1)$$

$$= n(n+1)(n^2 + n + 2) - 2n(n+1)$$

$$= n(n+1)\big((n^2 + n + 2) - 2\big)$$

$$= n(n+1)(n^2 + n)$$

$$= n^2(n+1)^2$$

$$\therefore S_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

5. 改良した計算方法からわかること

$$S_m = \frac{1}{2(m+1)}\left((n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 - \sum_{j=0}^{m-1}\left(1+(-1)^{m-j}\right)_{m+1}C_j S_j\right)$$

において、m が奇数の場合、右辺に現れる S_j は奇数次の項のみである。最低次の項は

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であり、$m \geq 3$ のとき、

$$\begin{aligned} f(n) &= (n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 - (1+(-1)^{m-1})_{m+1}C_1 S_1 \\ &= (n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 - 2(m+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= (n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 - (m+1)n(n+1) \end{aligned}$$

とおくと、$f(n)$ の定数項（n^0 の係数）は $1-1=0$ であり、n の 1 次の項の係数は $(m+1)-(m+1)=0$ であるから、S_m は n^2 を因数にもつ。さらに、

$$n^{m+1} - 1 = (n+1)(n^m - n^{m-1} + \cdots + n - 1)$$

より

$$g(n) = \frac{f(n)}{n+1} = (n+1)^m + (n^m - n^{m-1} + \cdots + n - 1) - (m+1)n$$

とおくと

$$\begin{aligned} g(-1) &= (-1+1)^m + (m+1)(-1) - (m+1)(-1) \\ &= 0 - (m+1) + (m+1) = 0 \end{aligned}$$

であるから、S_m は $(n+1)^2$ を因数にもつ。したがって、$m \geq 3$ の奇数について S_m は $n^2(n+1)^2$ を因数にもつ。

　また、m が偶数の場合、右辺に現れる S_j は偶数次の項のみである。最低次の項は

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

であり、$m \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} f(n) &= (n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 - (1+(-1)^m)_{m+1}C_0 S_0 \\ &= (n+1)^{m+1} + n^{m+1} - 1 - 2n \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(0) &= (0+1)^{m+1} + 0^{m+1} - 1 - 2\cdot 0 \\ &= 1 + 0 - 1 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1+1)^{m+1} + (-1)^{m+1} - 1 - 2\cdot(-1) \\ &= 0 + (-1) - 1 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}+1\right)^{m+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} - 1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} - 1 + 1 = 0$$

であるから、S_m は n と $(n+1)$ と $(2n+1)$ を因数にもつ。

以上より、S_m は、$m \geq 3$ の奇数のとき $n^2(n+1)^2$ を因数にもち、$m \geq 2$ の偶数のとき $n(n+1)(2n+1)$ を因数にもつことがわかる。

6. 計算例

以下、$m=4$ から $m=12$ の場合について、改良した計算方法により累乗和の公式を導出する。

(a) 4 乗和

$$\begin{aligned}(k+1)^5-(k-1)^5 &= (k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)\\ &\quad -(k^5-5k^4+10k^3-10k^2+5k-1)\\ &= 2(5k^4+10k^2+1)\end{aligned}$$

より

$$(n+1)^5+n^5-1=2\left(5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1\right)=2(5S_4+10S_2+S_0)$$

であるから

$$\begin{aligned}5S_4 &= \frac{1}{2}((n+1)^5+n^5-1)-10S_2-S_0\\ &= \frac{1}{2}\left((n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)+n^5-1\right)-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n\\ &= \frac{1}{2}(2n^4+5n^3+10n^2+10n+5n)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-n\\ &= \frac{1}{2}(2n^4+5n^3+10n^2+10n+3n)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{2}n(2n^4+5n^3+10n^2+10n+3)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n^3+3n^2+7n+3)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^2+n+3)-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\left((n^2+n+3)-\frac{10}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\left(n^2+n-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_4 &= \frac{1}{10}n(n+1)(2n+1)\left(n^2+n-\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\end{aligned}$$

(b) 5 乗和

$$(k+1)^6-(k-1)^6=(k^6+6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1)$$
$$-(k^6-6k^5+15k^4-20k^3+15k^2-6k+1)$$
$$=2(6k^5+20k^3+6k)$$

より

$$(n+1)^6+n^6-1=2\left(6\sum_{k=1}^{n}k^5+20\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k\right)=2(6S_5+20S_3+6S_1)$$

であるから

$$6S_5=\frac{1}{2}((n+1)^6+n^6-1)-20S_3-6S_1$$

$$=\frac{1}{2}\big((n^6+6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1)+n^6-1\big)-20\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(2n^6+6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n)-5n^2(n+1)^2-3n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^5+6n^4+15n^3+20n^2+15n+6)-5n^2(n+1)^2-3n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^4+4n^3+11n^2+9n+6)-5n^2(n+1)^2-3n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^4+4n^3+11n^2+9n)-5n^2(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)(2n^3+4n^2+11n+9)-5n^2(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^2+2n+9)-5n^2(n+1)^2$$

$$=n^2(n+1)^2\left(\left(n^2+n+\frac{9}{2}\right)-5\right)$$

$$=n^2(n+1)^2\left(n^2+n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore S_5=\frac{1}{6}n^2(n+1)^2\left(n^2+n-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

(c) 6 乗和

$$(k+1)^7-(k-1)^7=(k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1)$$
$$-(k^7-7k^6+21k^5-35k^4+35k^3-21k^2+7k-1)$$
$$=2(7k^6+35k^4+21k^2+1)$$

より

$$(n+1)^7+n^7-1=2\left(7\sum_{k=1}^{n}k^6+35\sum_{k=1}^{n}k^4+21\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$=2(7S_6+35S_4+21S_2+S_0)$$

であるから

$$7S_6=\frac{1}{2}((n+1)^7+n^7-1)-35S_4-21S_2-S_0$$

$$=\frac{1}{2}\big((n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1)+n^7-1\big)$$

$$-\frac{35}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{21}{6}n(n+1)(2n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}(2n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n)$$

$$-\frac{7}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{7}{2}n(n+1)(2n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}(2n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+5n)$$

$$-\frac{7}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^6+7n^5+21n^4+35n^3+35n^2+21n+5)-\frac{7}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^5+5n^4+16n^3+19n^2+16n+5)-\frac{7}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^4+2n^3+7n^2+6n+5)-\frac{7}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\big(3(n^4+2n^3+7n^2+6n+5)-7(3n^2+3n+2)\big)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$\therefore S_6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$=\frac{1}{14}n(n+1)(2n+1)\left(n^4+2n^3-n+\frac{1}{3}\right)$$

(d) 7 乗和

$$
\begin{aligned}
(k+1)^8-(k-1)^8 &= (k^8+8k^7+28k^6+56k^5+70k^4+56k^3+28k^2+8k+1) \\
&\quad -(k^8-8k^7+28k^6-56k^5+70k^4-56k^3+28k^2-8k+1) \\
&= 2(8k^7+56k^5+56k^3+8k)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
(n+1)^8+n^8-1 &= 2\left(8\sum_{k=1}^{n}k^7+56\sum_{k=1}^{n}k^5+56\sum_{k=1}^{n}k^3+8\sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= 2(8S_7+56S_5+56S_3+8S_1)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
8S_7 &= \frac{1}{2}((n+1)^8+n^8-1)-56S_5-56S_3-8S_1 \\
&= \frac{1}{2}\big((n^8+8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n+1)+n^8-1\big) \\
&\qquad -\frac{56}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\frac{56}{4}n^2(n+1)^2-\frac{8}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{2}(2n^8+8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n) \\
&\qquad -\frac{14}{3}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-14n^2(n+1)^2-4n(n+1) \\
&= n(n^7+4n^6+14n^5+28n^4+35n^3+28n^2+14n+4) \\
&\qquad -\frac{14}{3}n^2(n+1)^2(2n^2+2n+2)-4n(n+1) \\
&= n(n+1)(n^6+3n^5+11n^4+17n^3+18n^2+10n+4) \\
&\qquad -\frac{28}{3}n^2(n+1)^2(n^2+n+1)-4n(n+1) \\
&= n(n+1)(n^6+3n^5+11n^4+17n^3+18n^2+10n)-\frac{28}{3}n^2(n+1)^2(n^2+n+1) \\
&= n^2(n+1)(n^5+3n^4+11n^3+17n^2+18n+10)-\frac{28}{3}n^2(n+1)^2(n^2+n+1) \\
&= n^2(n+1)^2(n^4+2n^3+9n^2+8n+10)-\frac{28}{3}n^2(n+1)^2(n^2+n+1) \\
&= \frac{1}{3}n^2(n+1)^2\big(3(n^4+2n^3+9n^2+8n+10)-28(n^2+n+1)\big) \\
&= \frac{1}{3}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore S_7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)
$$

$$= \frac{1}{8} n^2 (n+1)^2 \left(n^4 + 2n^3 - \frac{1}{3} n^2 - \frac{4}{3} n + \frac{2}{3} \right)$$

(e) 8 乗和

$$
\begin{aligned}
(k+1)^9-(k-1)^9 &= (k^9+9k^8+36k^7+84k^6+126k^5+126k^4+84k^3+36k^2+9k+1)\\
&\quad -(k^9-9k^8+36k^7-84k^6+126k^5-126k^4+84k^3-36k^2+9k-1)\\
&= 2(9k^8+84k^6+126k^4+56k^2+1)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
(n+1)^9+n^9-1 &= 2\left(9\sum_{k=1}^{n}k^8+84\sum_{k=1}^{n}k^6+126\sum_{k=1}^{n}k^4+36\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&= 2(9S_8+84S_6+126S_4+36S_2+S_0)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
9S_8 &= \frac{1}{2}((n+1)^9+n^9-1)-84S_6-126S_4-36S_2-S_0\\
&= \frac{1}{2}\big((n^9+9n^8+36n^7+84n^6+126n^5+126n^4+84n^3+36n^2+9n+1)+n^9-1\big)\\
&\qquad -\frac{84}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)\\
&\qquad -\frac{126}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{36}{6}n(n+1)(2n+1)-n\\
&= \frac{1}{2}(2n^9+9n^8+36n^7+84n^6+126n^5+126n^4+84n^3+36n^2+9n)\\
&\qquad -2n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)\\
&\qquad -\frac{21}{5}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-6n(n+1)(2n+1)-n\\
&= \frac{1}{2}(2n^9+9n^8+36n^7+84n^6+126n^5+126n^4+84n^3+36n^2+7n)\\
&\qquad -\frac{1}{5}n(n+1)(2n+1)(10(3n^4+6n^3-3n+1)+21(3n^2+3n-1)+30)\\
&= \frac{1}{2}n(2n^8+9n^7+36n^6+84n^5+126n^4+126n^3+84n^2+36n+7)\\
&\qquad -\frac{1}{5}n(n+1)(2n+1)(30n^4+60n^3+63n^2+33n+19)\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)(2n^7+7n^6+29n^5+55n^4+71n^3+55n^2+29n+7)\\
&\qquad -\frac{1}{5}n(n+1)(2n+1)(30n^4+60n^3+63n^2+33n+19)\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^6+3n^5+13n^4+21n^3+25n^2+15n+7)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{5}n(n+1)(2n+1)(30n^4+60n^3+63n^2+33n+19)$$

$$=\frac{1}{10}n(n+1)(2n+1)\big(5(n^6+3n^5+13n^4+21n^3+25n^2+15n+7)$$

$$-2(30n^4+60n^3+63n^2+33n+19)\big)$$

$$=\frac{1}{10}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$\therefore S_8=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$=\frac{1}{18}n(n+1)(2n+1)\left(n^6+3n^5+n^4-3n^3-\frac{1}{5}n^2+\frac{9}{5}n-\frac{3}{5}\right)$$

(f) 9 乗和

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^{10}-(k-1)^{10}\\
&=(k^{10}+10k^9+45k^8+120k^7+210k^6+252k^5+210k^4+120k^3+45k^2+10k+1)\\
&\quad -(k^{10}-10k^9+45k^8-120k^7+210k^6-252k^5+210k^4-120k^3+45k^2-10k+1)\\
&=2(10k^9+120k^7+252k^5+120k^3+10k)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{10}+n^{10}-1&=2\left(10\sum_{k=1}^{n}k^9+120\sum_{k=1}^{n}k^7+252\sum_{k=1}^{n}k^5+120\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k\right)\\
&=2(10S_9+120S_7+252S_5+120S_3+10S_1)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
10S_9&=\frac{1}{2}((n+1)^{10}+n^{10}-1)-120S_7-252S_5-120S_3-10S_1\\
&=\frac{1}{2}\big((n^{10}+10n^9+45n^8+120n^7+210n^6+252n^5+210n^4+120n^3+45n^2+10n+1)\\
&\qquad +n^{10}-1\big)\\
&\qquad -\frac{120}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\\
&\qquad -\frac{252}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\frac{120}{4}n^2(n+1)^2-\frac{10}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{2}(2n^{10}+10n^9+45n^8+120n^7+210n^6+252n^5+210n^4+120n^3+45n^2+10n)\\
&\qquad -5n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\\
&\qquad -21n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-30n^2(n+1)^2-5n(n+1)\\
&=\frac{1}{2}n(2n^9+10n^8+45n^7+120n^6+210n^5+252n^4+210n^3+120n^2+45n+10)\\
&\qquad -n^2(n+1)^2(5(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)+21(2n^2+2n-1)+30)\\
&\qquad -5n(n+1)\\
&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^8+8n^7+37n^6+83n^5+127n^4+125n^3+85n^2+35n+10)\\
&\qquad -n^2(n+1)^2(15n^4+30n^3+37n^2+22n+19)-5n(n+1)\\
&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^8+8n^7+37n^6+83n^5+127n^4+125n^3+85n^2+35n)\\
&\qquad -n^2(n+1)^2(15n^4+30n^3+37n^2+22n+19)\\
&=\frac{1}{2}n^2(n+1)(2n^7+8n^6+37n^5+83n^4+127n^3+125n^2+85n+35)\\
&\qquad -n^2(n+1)^2(15n^4+30n^3+37n^2+22n+19)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+31n^4+52n^3+75n^2+50n+35)$$

$$- n^2(n+1)^2(15n^4+30n^3+37n^2+22n+19)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2\big((2n^6+6n^5+31n^4+52n^3+75n^2+50n+35)$$

$$- 2(15n^4+30n^3+37n^2+22n+19)\big)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$$

$$\therefore S_9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$$

$$= \frac{1}{10}n^2(n+1)^2\left(n^6+3n^5+\frac{1}{2}n^4-4n^3+\frac{1}{2}n^2+3n-\frac{3}{2}\right)$$

(g) 10 乗和

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^{11}-(k-1)^{11}\\
&=(k^{11}+11k^{10}+55k^9+165k^8+330k^7+462k^6+462k^5+330k^4+165k^3+55k^2+11k+1)\\
&\quad-(k^{11}-11k^{10}+55k^9-165k^8+330k^7-462k^6+462k^5-330k^4+165k^3-55k^2+11k\\
&\qquad-1)\\
&=2(11k^{10}+165k^8+462k^6+330k^4+55k^2+1)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{11}+n^{11}-1&=2\left(11\sum_{k=1}^{n}k^{10}+165\sum_{k=1}^{n}k^8+462\sum_{k=1}^{n}k^6+330\sum_{k=1}^{n}k^4+55\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&=2(11S_{10}+165S_8+462S_6+330S_4+55S_2+S_0)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
11S_{10}&=\frac{1}{2}((n+1)^{11}+n^{10}-1)-165S_8-462S_6-330S_4-55S_2-S_0\\
&=\frac{1}{2}\big((n^{11}+11n^{10}+55n^9+165n^8+330n^7+462n^6+462n^5+330n^4+165n^3+55n^2\\
&\qquad+11n+1)+n^{11}-1\big)\\
&\qquad-\frac{165}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)\\
&\qquad-\frac{462}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)\\
&\qquad-\frac{330}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{55}{6}n(n+1)(2n+1)-n\\
&=\frac{1}{2}(2n^{11}+11n^{10}+55n^9+165n^8+330n^7+462n^6+462n^5+330n^4+165n^3+55n^2\\
&\qquad+11n)\\
&\qquad-\frac{11}{6}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)\\
&\qquad-11n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)\\
&\qquad-11n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{55}{6}n(n+1)(2n+1)-n\\
&=\frac{1}{2}(2n^{11}+11n^{10}+55n^9+165n^8+330n^7+462n^6+462n^5+330n^4+165n^3+55n^2\\
&\qquad+9n)\\
&\quad-\frac{11}{6}n(n+1)(2n+1)\big((5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)\\
&\qquad+6(3n^4+6n^3-3n+1)+6(3n^2+3n-1)+5\big)
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^{10}+11n^9+55n^8+165n^7+330n^6+462n^5+462n^4+330n^3+165n^2+55n+9)$$
$$-\frac{11}{6}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+23n^4+21n^3+17n^2+9n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^9+9n^8+46n^7+119n^6+211n^5+251n^4+211n^3+119n^2+46n+9)$$
$$-\frac{11}{6}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+23n^4+21n^3+17n^2+9n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^8+4n^7+21n^6+49n^5+81n^4+85n^3+63n^2+28n+9)$$
$$-\frac{11}{6}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+23n^4+21n^3+17n^2+9n+2)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\big(3(n^8+4n^7+21n^6+49n^5+81n^4+85n^3+63n^2+28n+9)$$
$$-11(5n^6+15n^5+23n^4+21n^3+17n^2+9n+2)\big)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\times\big((3n^8+12n^7+63n^6+147n^5+243n^4+255n^3+189n^2+84n+27)$$
$$-(55n^6+165n^5+253n^4+231n^3+187n^2+99n+22)\big)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$

$$\therefore S_{10}=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$

$$=\frac{1}{22}n(n+1)(2n+1)\left(n^8+4n^7+\frac{8}{3}n^6-6n^5-\frac{10}{3}n^4+8n^3+\frac{2}{3}n^2-5n+\frac{5}{3}\right)$$

(h) 11 乗和

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^{12}-(k-1)^{12}\\
&=(k^{12}+12k^{11}+66k^{10}+220k^9+495k^8+792k^7+924k^6+792k^5+495k^4+220k^3+66k^2\\
&\qquad+12k+1)\\
&\quad-(k^{12}-12k^{11}+66k^{10}-220k^9+495k^8-792k^7+924k^6-792k^5+495k^4-220k^3\\
&\qquad+66k^2-12k+1)\\
&=2(12k^{11}+220k^9+792k^7+792k^5+220k^3+12k)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^{12}+n^{12}-1\\
&\qquad=2\left(12\sum_{k=1}^{n}k^{11}+220\sum_{k=1}^{n}k^9+792\sum_{k=1}^{n}k^7+792\sum_{k=1}^{n}k^5+220\sum_{k=1}^{n}k^3+12\sum_{k=1}^{n}k\right)\\
&\qquad=2(12S_{11}+220S_9+792S_7+792S_5+220S_3+12S_1)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
12S_{11}&=\frac{1}{2}((n+1)^{12}+n^{12}-1)-220S_9-792S_7-792S_5-220S_3-12S_1\\
&=\frac{1}{2}\big((n^{12}+12n^{11}+66n^{10}+220n^9+495n^8+792n^7+924n^6+792n^5+495n^4\\
&\qquad+220n^3+66n^2+12n+1)+n^{12}-1\big)\\
&\qquad-\frac{220}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)\\
&\qquad-\frac{792}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\\
&\qquad-\frac{792}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\frac{220}{4}n^2(n+1)^2-\frac{12}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{2}(2n^{12}+12n^{11}+66n^{10}+220n^9+495n^8+792n^7+924n^6+792n^5+495n^4\\
&\qquad+220n^3+66n^2+12n)\\
&\qquad-11n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)\\
&\qquad-33n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)\\
&\qquad-66n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-55n^2(n+1)^2-6n(n+1)\\
&=\frac{1}{2}(2n^{12}+12n^{11}+66n^{10}+220n^9+495n^8+792n^7+924n^6+792n^5+495n^4\\
&\qquad+220n^3+54n^2)\\
&\quad-11n^2(n+1)^2\big((2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)\\
&\qquad+3(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)+6(2n^2+2n-1)+5\big)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}n^2(2n^{10} + 12n^9 + 66n^8 + 220n^7 + 495n^6 + 792n^5 + 924n^4 + 792n^3 + 495n^2 + 220n + 54) - 11n^2(n+1)^2(2n^6 + 6n^5 + 10n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 6n + 2)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)(2n^9 + 10n^8 + 56n^7 + 164n^6 + 331n^5 + 461n^4 + 463n^3 + 329n^2 + 166n + 54) - 22n^2(n+1)^2(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^8 + 8n^7 + 48n^6 + 116n^5 + 215n^4 + 246n^3 + 217n^2 + 112n + 54) - 22n^2(n+1)^2(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2\big((2n^8 + 8n^7 + 48n^6 + 116n^5 + 215n^4 + 246n^3 + 217n^2 + 112n + 54) - 44(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 5n^2 + 3n + 1)\big)$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^8 + 8n^7 + 4n^6 - 16n^5 - 5n^4 + 26n^3 - 3n^2 - 20n + 10)$$

$$\therefore S_{11} = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8 + 8n^7 + 4n^6 - 16n^5 - 5n^4 + 26n^3 - 3n^2 - 20n + 10)$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\left(n^8 + 4n^7 + 2n^6 - 8n^5 + \frac{5}{2}n^4 + 13n^3 - \frac{3}{2}n^2 - 10n + 5\right)$$

(i) 12 乗和

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^{13}-(k-1)^{13}\\
&=(k^{13}+13k^{12}+78k^{11}+286k^{10}+715k^{9}+1287k^{8}+1716k^{7}+1716k^{6}+1287k^{5}+715k^{4}\\
&\qquad+286k^{3}+78k^{2}+13k+1)\\
&\quad-(k^{13}-13k^{12}+78k^{11}-286k^{10}+715k^{9}-1287k^{8}+1716k^{7}-1716k^{6}+1287k^{5}-715k^{4}\\
&\qquad+286k^{3}-78k^{2}+13k-1)\\
&=2(13k^{12}+286k^{10}+1287k^{8}+1716k^{6}+715k^{4}+78k^{2}+1)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^{13}+n^{13}-1\\
&\qquad=2\left(13\sum_{k=1}^{n}k^{12}+286\sum_{k=1}^{n}k^{10}+1287\sum_{k=1}^{n}k^{8}+1716\sum_{k=1}^{n}k^{6}+715\sum_{k=1}^{n}k^{4}+78\sum_{k=1}^{n}k^{2}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&\qquad\qquad=2(13S_{12}+286S_{10}+1287S_{8}+1716S_{6}+715S_{4}+78S_{2}+S_{0})
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
13S_{12}&=\frac{1}{2}((n+1)^{13}+n^{13}-1)-286S_{10}-1287S_{8}-1716S_{6}-715S_{4}-78S_{2}-S_{0}\\
&=\frac{1}{2}\Big((n^{13}+13n^{12}+78n^{11}+286n^{10}+715n^{9}+1287n^{8}+1716n^{7}+1716n^{6}+1287n^{5}\\
&\qquad+715n^{4}+286n^{3}+78n^{2}+13n+1)+n^{13}-1\Big)\\
&\qquad-\frac{286}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^{8}+12n^{7}+8n^{6}-18n^{5}-10n^{4}+24n^{3}+2n^{2}-15n+5)\\
&\qquad\quad-\frac{1287}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^{6}+15n^{5}+5n^{4}-15n^{3}-n^{2}+9n-3)\\
&\qquad\quad-\frac{1716}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^{4}+6n^{3}-3n+1)\\
&\qquad\quad-\frac{715}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^{2}+3n-1)-\frac{78}{6}n(n+1)(2n+1)-n\\
&=\frac{1}{2}(2n^{13}+13n^{12}+78n^{11}+286n^{10}+715n^{9}+1287n^{8}+1716n^{7}+1716n^{6}+1287n^{5}\\
&\qquad+715n^{4}+286n^{3}+78n^{2}+13n)\\
&\qquad-\frac{13}{3}n(n+1)(2n+1)(3n^{8}+12n^{7}+8n^{6}-18n^{5}-10n^{4}+24n^{3}+2n^{2}-15n+5)\\
&\qquad\quad-\frac{143}{10}n(n+1)(2n+1)(5n^{6}+15n^{5}+5n^{4}-15n^{3}-n^{2}+9n-3)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{286}{7}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$-\frac{143}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-13n(n+1)(2n+1)-n$$

$$=\frac{1}{2}(2n^{13}+13n^{12}+78n^{11}+286n^{10}+715n^9+1287n^8+1716n^7+1716n^6+1287n^5$$

$$+715n^4+286n^3+78n^2+11n)$$

$$-\frac{13}{210}n(n+1)(2n+1)$$
$$\times(70(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$
$$+231(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)+660(3n^4+6n^3-3n+1)$$
$$+385(3n^2+3n-1)+210)$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^{12}+13n^{11}+78n^{10}+286n^9+715n^8+1287n^7+1716n^6+1716n^5+1287n^4$$

$$+715n^3+286n^2+78n+11)$$

$$-\frac{13}{210}n(n+1)(2n+1)$$
$$\times(210n^8+840n^7+1715n^6+2205n^5+2435n^4+2175n^3+1064n^2+204n$$
$$+142)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^{11}+11n^{10}+67n^9+219n^8+496n^7+791n^6+925n^5+791n^4+496n^3$$

$$+219n^2+67n+11)$$

$$-\frac{13}{210}n(n+1)(2n+1)$$
$$\times(210n^8+840n^7+1715n^6+2205n^5+2435n^4+2175n^3+1064n^2+204n$$
$$+142)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^{10}+5n^9+31n^8+94n^7+201n^6+295n^5+315n^4+238n^3$$

$$+129n^2+45n+11)$$

$$-\frac{13}{210}n(n+1)(2n+1)$$
$$\times(210n^8+840n^7+1715n^6+2205n^5+2435n^4+2175n^3+1064n^2+204n$$
$$+142)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{210} n(n+1)(2n+1) \\
&\quad \times \big(105(n^{10} + 5n^9 + 31n^8 + 94n^7 + 201n^6 + 295n^5 + 315n^4 + 238n^3 + 129n^2 \\
&\quad + 45n + 11) \\
&\quad - 13(210n^8 + 840n^7 + 1715n^6 + 2205n^5 + 2435n^4 + 2175n^3 + 1064n^2 + 204n \\
&\quad + 142)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{210} n(n+1)(2n+1) \\
&\quad \times (105n^{10} + 525n^9 + 525n^8 - 1050n^7 - 1190n^6 + 2310n^5 - 1420n^4 - 3285n^3 \\
&\quad - 287n^2 + 2073n - 691)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore S_{12} &= \frac{1}{2730} n(n+1)(2n+1)(105n^{10} + 525n^9 + 525n^8 - 1050n^7 - 1190n^6 + 2310n^5 \\
&\quad + 1420n^4 - 3285n^3 - 287n^2 + 2073n - 691) \\
&= \frac{1}{13} n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{2}n^9 + \frac{5}{2}n^8 - 5n^7 - \frac{17}{3}n^6 + 11n^5 + \frac{142}{21}n^4 - \frac{219}{14}n^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{41}{30}n^2 + \frac{691}{70}n - \frac{691}{210}\right)
\end{aligned}
$$

7. まとめ

累乗和 S_m の公式を導く際に、恒等式

$$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}{}_{m+1}C_j k^j$$

の代わりに

$$(k+1)^{m+1}-(k-1)^{m+1}=\sum_{j=0}^{m}\left(1+(-1)^{m-j}\right){}_{m+1}C_j k^j$$

を用いると、計算に必要な S_j（$0\le j\le m-1$）の項の数を半分に減らすことができる。

参考文献

・遠山 啓「代数入門　数と式」ちくま学芸文庫、2016（遠山 啓「数と式ー代数入門（リフレッシュ数学 1）」講談社、1980）
・小谷 健司「累乗和の公式について」イプシロン、vol. 51、pp. 43-52、2009
・杉山 康恭、遠藤 良樹「累乗和の公式導出の簡単化と諸性質」沼津工業専門学校研究報告、vol. 53、pp. 57-63、2019

付録：公式一覧

得られた結果を、以下にまとめて示す。

(1) 因数分解形式（整係数）

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$$

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{n} k^{10}$$
$$= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$

$$S_{11} = \sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10)$$

$$S_{12} = \sum_{k=1}^{n} k^{12}$$
$$= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5$$
$$+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691)$$

(2) 因数分解形式（分数係数）

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5} n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2+n-\frac{1}{3}\right)$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6} n^2(n+1)^2\left(n^2+n-\frac{1}{2}\right)$$

$$S_6 = \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{7} n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^4+2n^3-n+\frac{1}{3}\right)$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8} n^2(n+1)^2\left(n^4+2n^3-\frac{1}{3}n^2-\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}\right)$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{9} n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^6+3n^5+n^4-3n^3-\frac{1}{5}n^2+\frac{9}{5}n-\frac{3}{5}\right)$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{10} n^2(n+1)^2\left(n^6+3n^5+\frac{1}{2}n^4-4n^3+\frac{1}{2}n^2+3n-\frac{3}{2}\right)$$

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{n} k^{10}$$

$$= \frac{1}{11} n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^8+4n^7+\frac{8}{3}n^6-6n^5-\frac{10}{3}n^4+8n^3+\frac{2}{3}n^2-5n+\frac{5}{3}\right)$$

$$S_{11} = \sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2\left(n^8+4n^7+2n^6-8n^5+\frac{5}{2}n^4+13n^3-\frac{3}{2}n^2-10n+5\right)$$

$$S_{12} = \sum_{k=1}^{n} k^{12}$$

$$= \frac{1}{13} n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^{10}+5n^9+5n^8-10n^7-\frac{34}{3}n^6+22n^5+\frac{284}{21}n^4-\frac{219}{7}n^3-\frac{41}{15}n^2\right.$$

$$\left.+\frac{691}{35}n-\frac{691}{105}\right)$$