力と運動
ー粘性抵抗ー

渡邉 俊夫

概要

運動する物体にはたらく抵抗力が速度 v に比例し、$F=-\gamma v$（ここで、γ は正の定数で $v \geq 0$ とする）で表されるとき、これを粘性抵抗という。

本稿では、粘性抵抗がはたらく物体の速度が時間に対して指数関数的に変化することを、微分方程式を使わずに示す。

ただし、自然対数の底の定義 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ から導かれる関係式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}$$

の知識が必要である。

$$\because \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cong \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x}}=\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x}\to\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

粘性抵抗のみの場合

質量 m の物体に、速度 v に比例する粘性抵抗力 $F=-\gamma v$ のみがはたらく場合、運動の法則より

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=F=-\gamma v$$

だから

$$\Delta v=-\frac{\gamma}{m}v\Delta t$$

$$v+\Delta v=v-\frac{\gamma}{m}v\Delta t=v\left(1-\frac{\gamma}{m}\Delta t\right) \qquad \therefore \frac{v+\Delta v}{v}=\left(1-\frac{\gamma}{m}\Delta t\right)$$

したがって、時刻 t における速度 $v(t)$ と、微小時間後の時刻 $t+\Delta t$ における速度 $v(t+\Delta t)$ との関係は

$$\frac{v(t+\Delta t)}{v(t)}=\frac{v+\Delta v}{v}=\left(1-\frac{\gamma}{m}\Delta t\right)$$

粘性抵抗のみの場合

時刻 $t = 0$ から時刻 t までの時間を n 区間の微小時間 $\Delta t = t/n$ に分割して、各区間の前後の速度の比に前ページの関係を用いると

$$\frac{v(\Delta t)}{v(0)} \cdot \frac{v(2\Delta t)}{v(\Delta t)} \cdot \frac{v(3\Delta t)}{v(2\Delta t)} \cdot \cdots \cdot \frac{v(t)}{v(t-\Delta t)} = \left(1 - \frac{\gamma}{m}\Delta t\right)^n$$

$$\therefore \frac{v(t)}{v(0)} = \left(1 - \frac{\gamma}{m}\Delta t\right)^n$$

ここで、時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = v_0$ とし、$n \to \infty$ とすると

$$\frac{v(t)}{v(0)} = \frac{v(t)}{v_0} = \left(1 - \frac{\gamma}{m}\Delta t\right)^n \to e^{-(\gamma/m)t}$$

ゆえに、

$$v(t) = v_0 e^{-(\gamma/m)t}$$

を得る。すなわち、物体の速度 v は時間とともに指数関数的に減少して 0 に近づく。

粘性抵抗と重力がはたらく場合

粘性抵抗力 $-\gamma v$ と重力 mg がはたらく場合は、運動の法則より

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = mg - \gamma v$$

だから

$$\Delta v = \left(g - \frac{\gamma}{m}v\right)\Delta t = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right)\Delta t$$

ここで、$V = v - \dfrac{mg}{\gamma} = v - v_\infty$ とおくと、$v_\infty = \dfrac{mg}{\gamma}$ は定数だから

$$\Delta V = \Delta v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right)\Delta t = -\frac{\gamma}{m}V\Delta t$$

したがって、

$$V + \Delta V = V - \frac{\gamma}{m}V\Delta t = V\left(1 - \frac{\gamma}{m}\Delta t\right) \qquad \therefore \frac{V + \Delta V}{V} = \left(1 - \frac{\gamma}{m}\Delta t\right)$$

粘性抵抗と重力がはたらく場合

時刻 $t=0$ において $V(0)=V_0$ とすると、重力がない場合と同様にして

$$V(t)=V(0)\left(1-\frac{\gamma}{m}\Delta t\right)^n=V_0\left(1-\frac{\gamma}{m}\frac{t}{n}\right)^n\to V_0e^{-(\gamma/m)t}$$

これより

$$v(t)=v_\infty+V(t)=\frac{mg}{\gamma}+V(t)=\frac{mg}{\gamma}+V_0e^{-(\gamma/m)t}$$

時刻 $t=0$ における初速度を $v(0)=v_0$ とすると、

$$v_0=\frac{mg}{\gamma}+V_0\qquad\therefore V_0=v_0-\frac{mg}{\gamma}$$

ゆえに、

$$v(t)=\frac{mg}{\gamma}+\left(v_0-\frac{mg}{\gamma}\right)e^{-(\gamma/m)t}=v_0e^{-(\gamma/m)t}+\frac{mg}{\gamma}\left(1-e^{-(\gamma/m)t}\right)$$

物体の速度 v は時間とともに指数関数的に変化して終端速度 $v_\infty=mg/\gamma$ に近づく。

付録：微分方程式による解法（粘性抵抗のみ）

質量 m の物体に、速度 v に比例する粘性抵抗力 $F = -\gamma v$ のみがはたらく場合の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = -\gamma v$$

だから

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}$$

両辺を時刻 $t = 0$ から時刻 t まで時間で積分して

$$\int_0^t \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^t \left(-\frac{\gamma}{m}\right)\mathrm{d}t$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\gamma}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

付録：微分方程式による解法（粘性抵抗のみ）

$$[\log v]_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{\gamma}{m}[t]_0^t$$

$$\log v(t) - \log v(0) = -\frac{\gamma}{m}t$$

$$\log\frac{v(t)}{v(0)} = -\frac{\gamma}{m}t$$

時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = v_0$ とすると

$$\log\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{\gamma}{m}t$$

$$\frac{v(t)}{v_0} = e^{-(\gamma/m)t}$$

$$\therefore v(t) = v_0 e^{-(\gamma/m)t}$$

付録：微分方程式による解法（粘性抵抗と重力）

粘性抵抗力 $F = -\gamma v$ に加えて、重力 mg がはたらく場合の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v$$

だから

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}(v - v_\infty)$$

ただし、$v_\infty = \dfrac{mg}{\gamma}$ とした。これより

$$\frac{1}{v - v_\infty}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}$$

付録:微分方程式による解法(粘性抵抗と重力)

両辺を時刻 $t = 0$ から時刻 t まで時間で積分して

$$\int_0^t \frac{1}{v - v_\infty} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_0^t \left(-\frac{\gamma}{m}\right) \mathrm{d}t$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v - v_\infty} = -\frac{\gamma}{m} \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$[\log(v - v_\infty)]_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{\gamma}{m} [t]_0^t$$

$$\log(v(t) - v_\infty) - \log(v(0) - v_\infty) = -\frac{\gamma}{m} t$$

$$\log \frac{v(t) - v_\infty}{v(0) - v_\infty} = -\frac{\gamma}{m} t$$

付録：微分方程式による解法（粘性抵抗と重力）

時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = v_0$ とすると

$$\log \frac{v(t) - v_\infty}{v_0 - v_\infty} = -\frac{\gamma}{m} t$$

$$\frac{v(t) - v_\infty}{v_0 - v_\infty} = e^{-(\gamma/m)t}$$

$$v(t) - v_\infty = (v_0 - v_\infty) e^{-(\gamma/m)t}$$

$$\therefore v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-(\gamma/m)t} = v_0 e^{-(\gamma/m)t} + v_\infty \left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right)$$

すなわち、

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} + \left(v_0 - \frac{mg}{\gamma}\right) e^{-(\gamma/m)t} = v_0 e^{-(\gamma/m)t} + \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-(\gamma/m)t}\right)$$