第6戦が行われる確率

2017.10.31
渡邉 俊夫

問題

2017年、横浜DeNAベイスターズはプロ野球セントラル・リーグのクライマックスシリーズを勝ち抜いて19年ぶりに日本シリーズに進出し、パシフィック・リーグを制した福岡ソフトバンクホークスと対戦することになった。

神奈川県出身で鹿児島市在住のW氏は、11月4日土曜日に福岡ヤフオク！ドームで開催される日本シリーズ第6戦のビジター応援指定席のチケットを取ったのだが、日本シリーズはどちらかのチームが4勝した時点で優勝が決まり終了となる。

W氏が第6戦を観ることができる確率はどれだけか？

第 k 戦でベイスターズが優勝する確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率を p とする。引分は考えないものとすると、ホークスがベイスターズに勝つ確率は $1-p$ である。

第1戦開始前の時点において、第 k 戦でベイスターズが勝って 4 勝 $(k-4)$ 敗で優勝する確率 $B_k(0,0)$ は、第 1 戦から第 $k-1$ 戦のうちにベイスターズが $(k-4)$ 敗する確率を考えて

$$B_k(0,0) = {}_{k-1}C_{k-4}p^4(1-p)^{k-4}$$

である。ただし、

$${}_{k-1}C_{k-4} = \binom{k-1}{k-4} = \frac{(k-1)!}{\big(k-1-(k-4)\big)!\,(k-4)!} = \frac{(k-1)!}{3!\,(k-4)!}$$

である。

第 k 戦でベイスターズが優勝する確率

第 n 戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗となったとき、第 k 戦でベイスターズが勝って 4 勝 $(k-4)$ 敗で優勝する確率 $B_k(b,h)$ は

$$B_k(b,h) = {}_{k-n-1}C_{k-4-h}\,p^{4-b}(1-p)^{k-4-h}$$

である。ただし、

$${}_{k-n-1}C_{k-4-h} = \binom{k-n-1}{k-4-h} = \frac{(k-n-1)!}{\big(k-n-1-(k-4-h)\big)!\,(k-4-h)!}$$

$$= \frac{(k-n-1)!}{(3-b)!\,(k-4-h)!}$$

であり、$h > k-4$ のときは $B_k(b,h) = 0$ とする。

第 k 戦でホークスが優勝する確率

第 n 戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗、すなわち、ホークスの h 勝 b 敗となったとき、第 k 戦でホークスが勝って 4 勝 $(k-4)$ 敗で優勝する確率 $H_k(b,h)$ は

$$H_k(b,h) = {}_{k-n-1}C_{k-4-b}(1-p)^{4-h}(1-p)^{k-4-b}$$

である。ただし、

$$ {}_{k-n-1}C_{k-4-b} = \binom{k-n-1}{k-4-b} = \frac{(k-n-1)!}{\big(k-n-1-(k-4-b)\big)!\,(k-4-b)!}$$

$$= \frac{(k-n-1)!}{(3-h)!\,(k-4-b)!}$$

であり、$b > k-4$ のときは $H_k(b,h) = 0$ とする。

第 $k+1$ 戦が行われる確率

第 n 戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗となったとき、第 k 戦でベイスターズが優勝する確率を $B_k(b,h)$、第 k 戦でホークスが優勝する確率を $H_k(b,h)$ とすると、第 k 戦で終わる確率は

$$X_k(b,h) = B_k(b,h) + H_k(b,h)$$

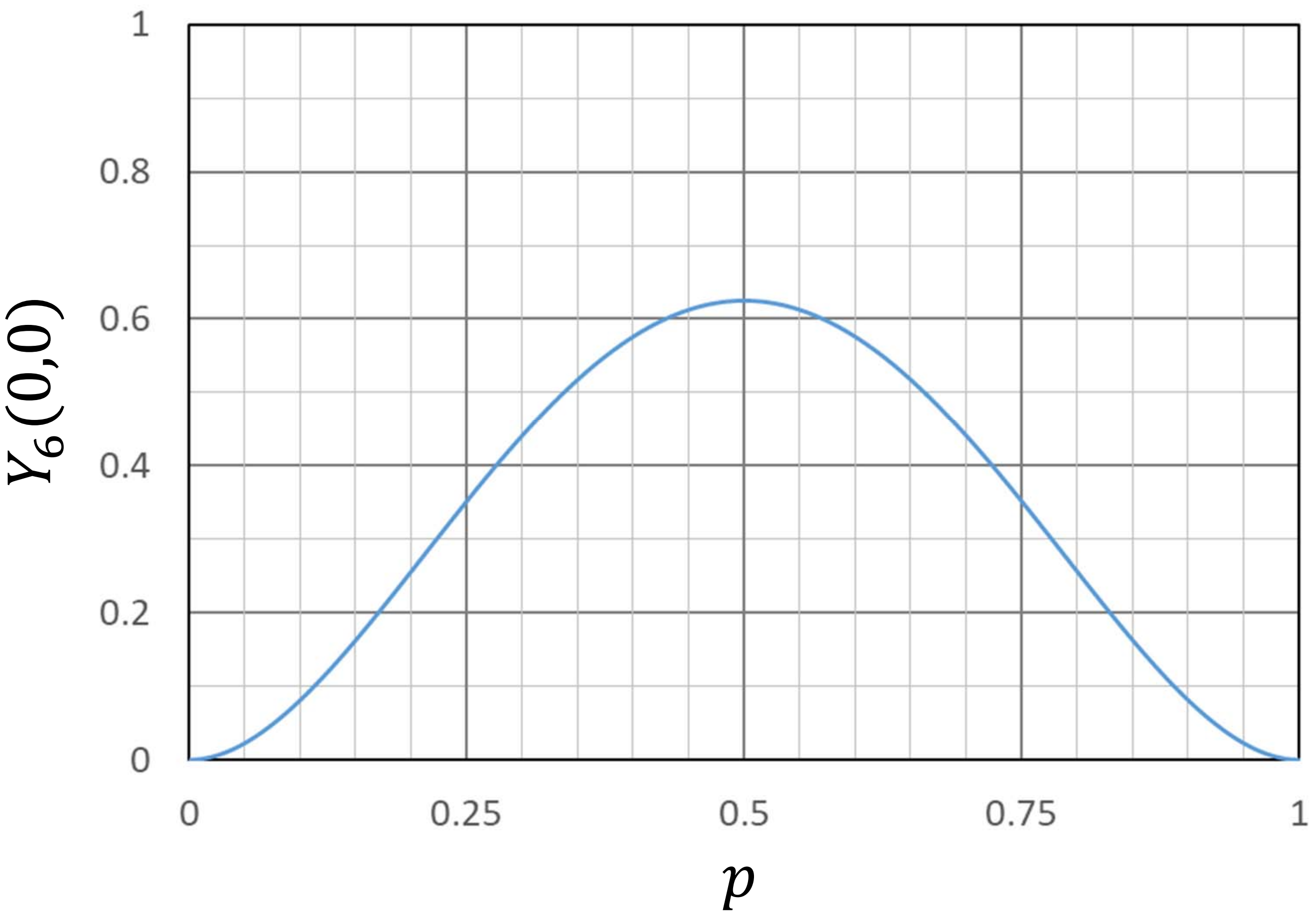
である。したがって、第 $k+1$ 戦が行われる確率は

$$\begin{aligned} Y_{k+1}(b,k) &= 1 - \sum_{i=4}^{k} X_i(b,h) \\ &= 1 - \sum_{i=4}^{k} (B_i(b,h) + H_i(b,h)\,) \end{aligned}$$

となる。

第6戦が行われる確率（第1戦開始前）

ベイスターズがホークスに勝つ確率 p に対して、第1戦開始前の時点で第6戦が行われる確率 $Y_6(0,0)$ を計算すると下図のようになる。



$p = \frac{1}{2}$（両チームが互角）のとき

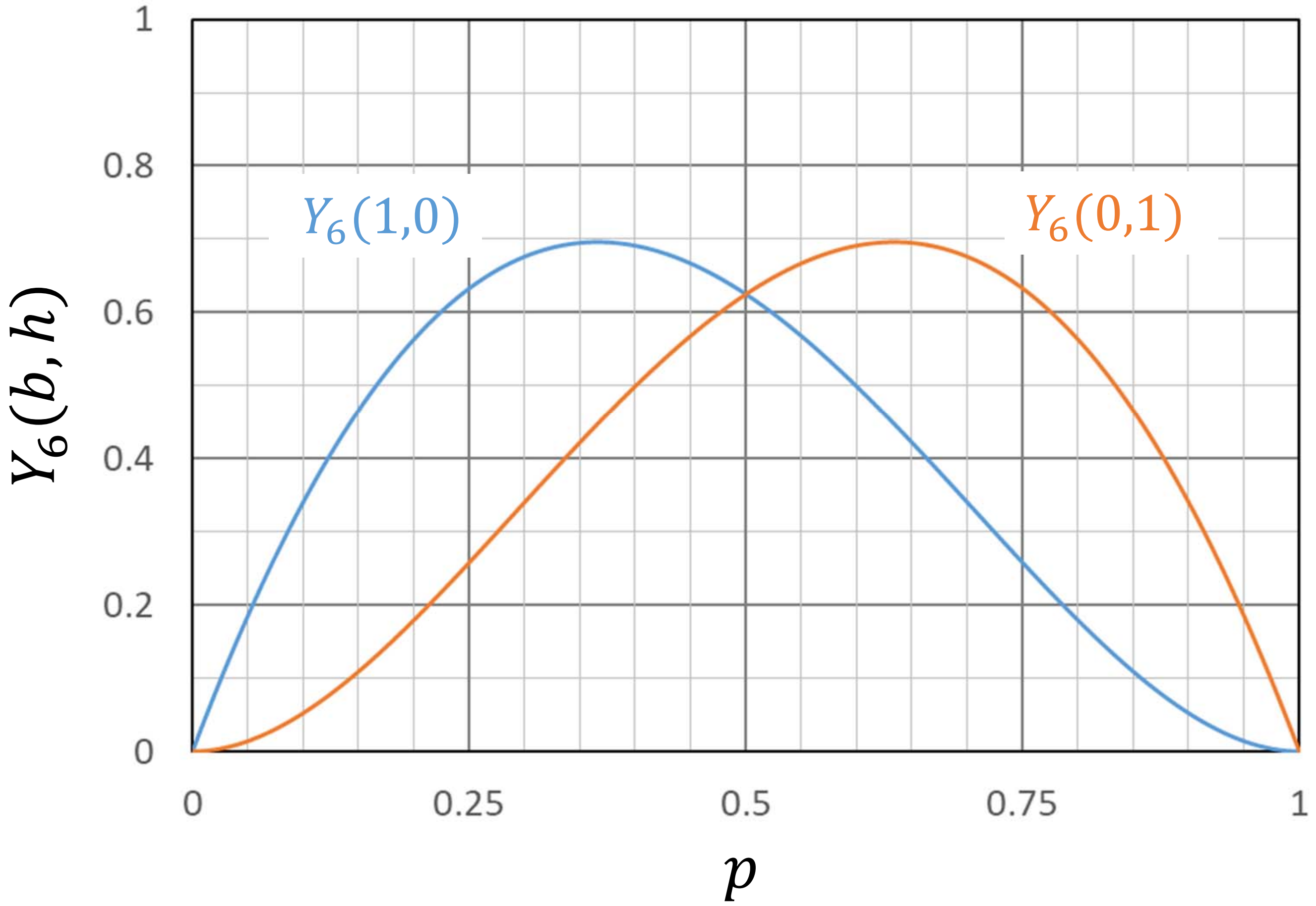
第6戦が行われる確率は62.5 %

$p = \frac{1}{3}$（1勝2敗ペース）のとき

第6戦が行われる確率は49.4 %

第6戦が行われる確率（第1戦終了時）

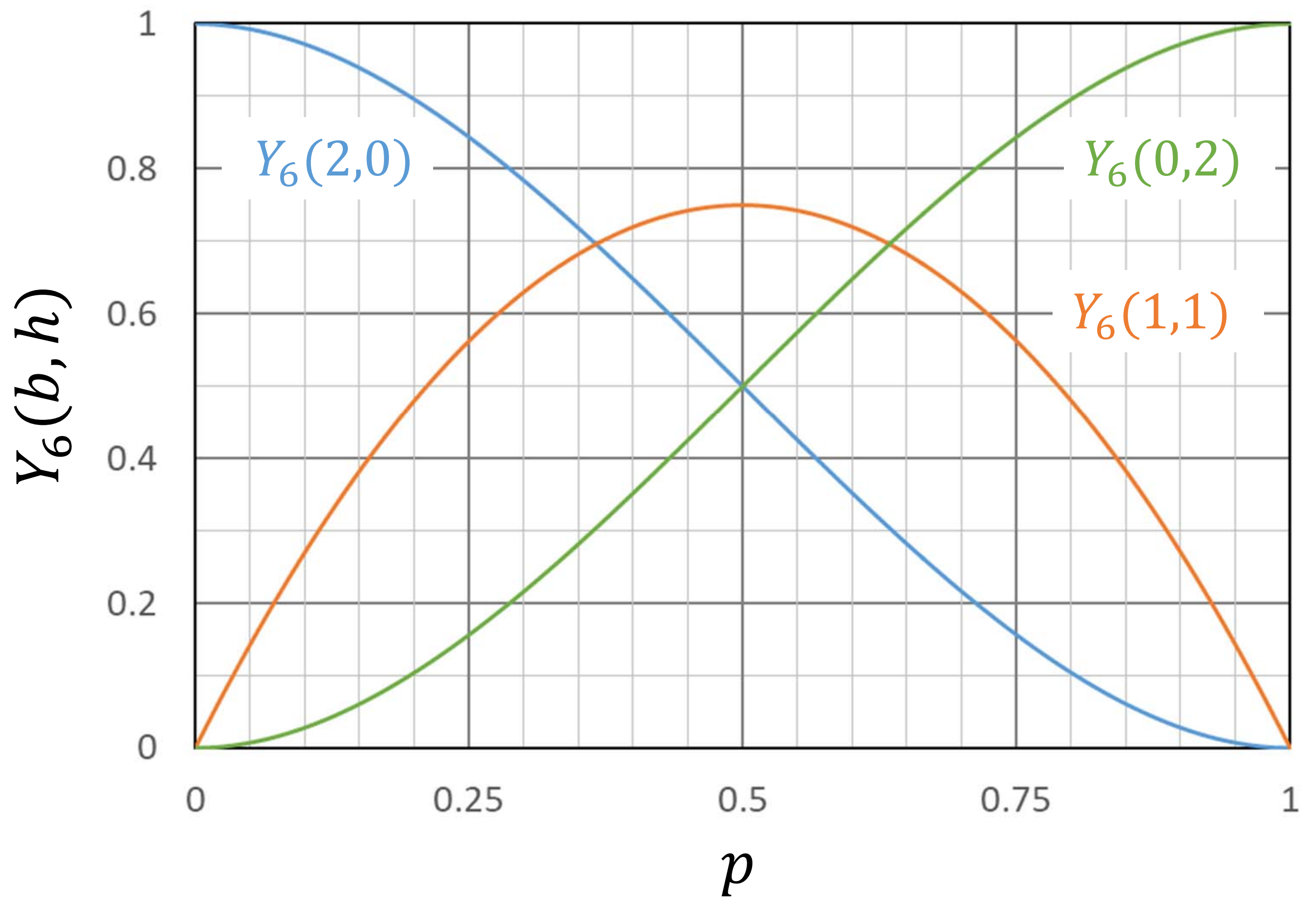
第1戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗となったとき、第6戦が行われる確率 $Y_6(b,h)$ は下図のようになる。



$p=\dfrac{1}{2}$（両チームが互角）のときは第1戦終了の時点でも、第6戦が行われる確率は、第1戦開始前と変わらない

第6戦が行われる確率（第2戦終了時）

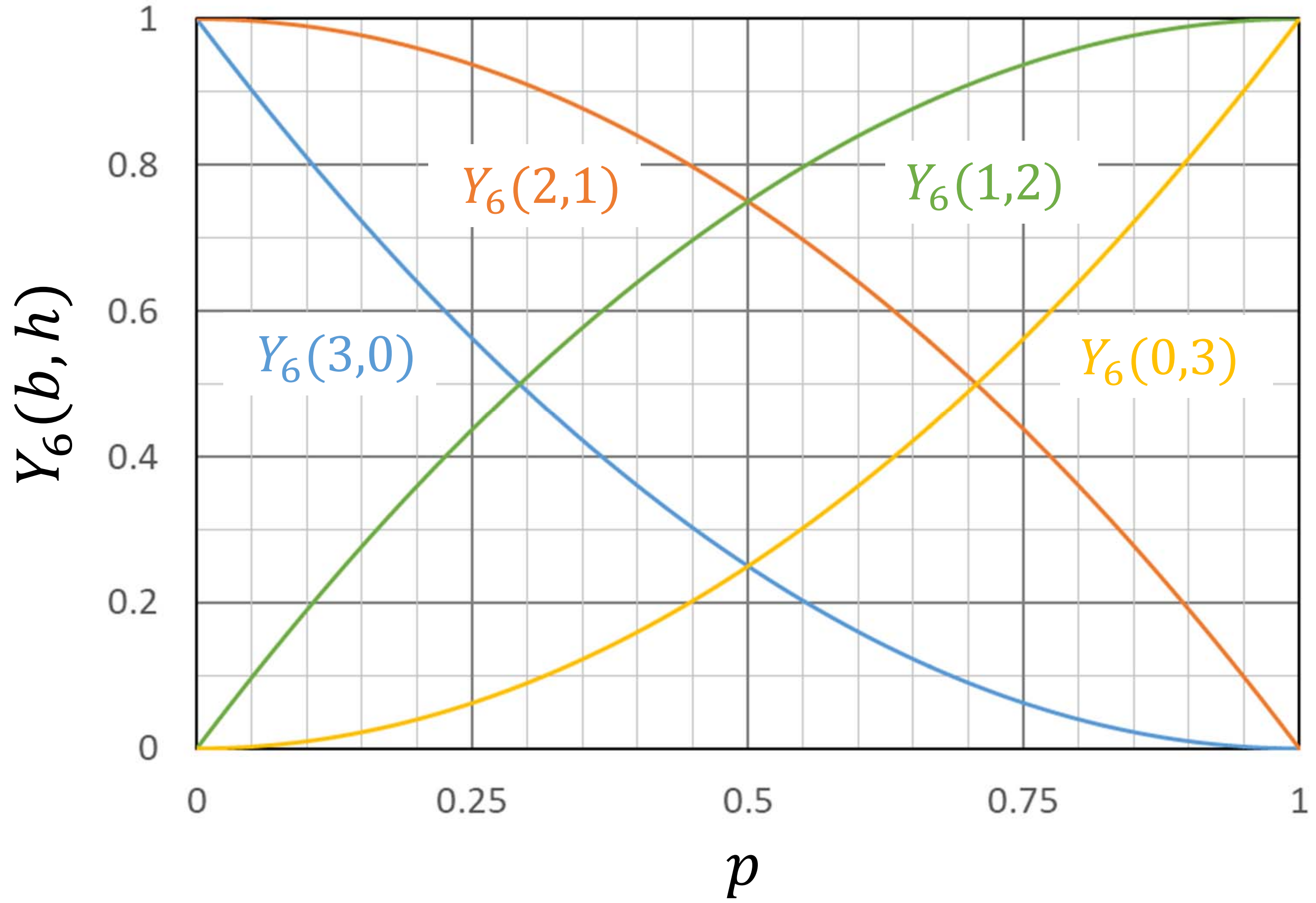
第2戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗となったとき、第6戦が行われる確率 $Y_6(b,h)$ は下図のようになる。



勝率の低いチームが連勝すると
（この後負ける可能性が高いので）
第6戦が行われる確率は高くなる

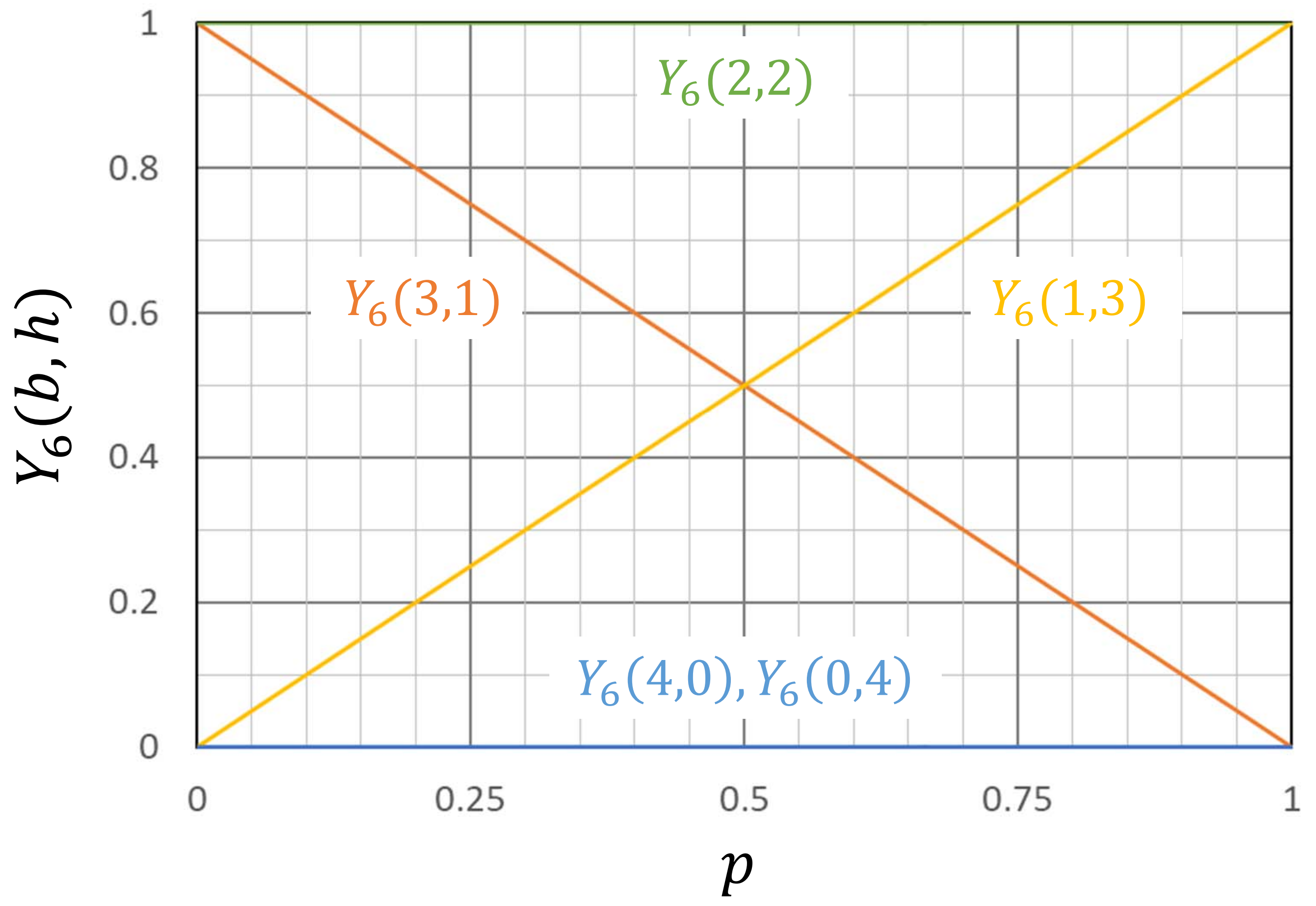
第6戦が行われる確率（第3戦終了時）

第3戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗となったとき、第6戦が行われる確率 $Y_6(b,h)$ は下図のようになる。



第6戦が行われる確率（第4戦終了時）

第4戦まで終了してベイスターズの b 勝 h 敗となったとき、第6戦が行われる確率 $Y_6(b,h)$ は下図のようになる。

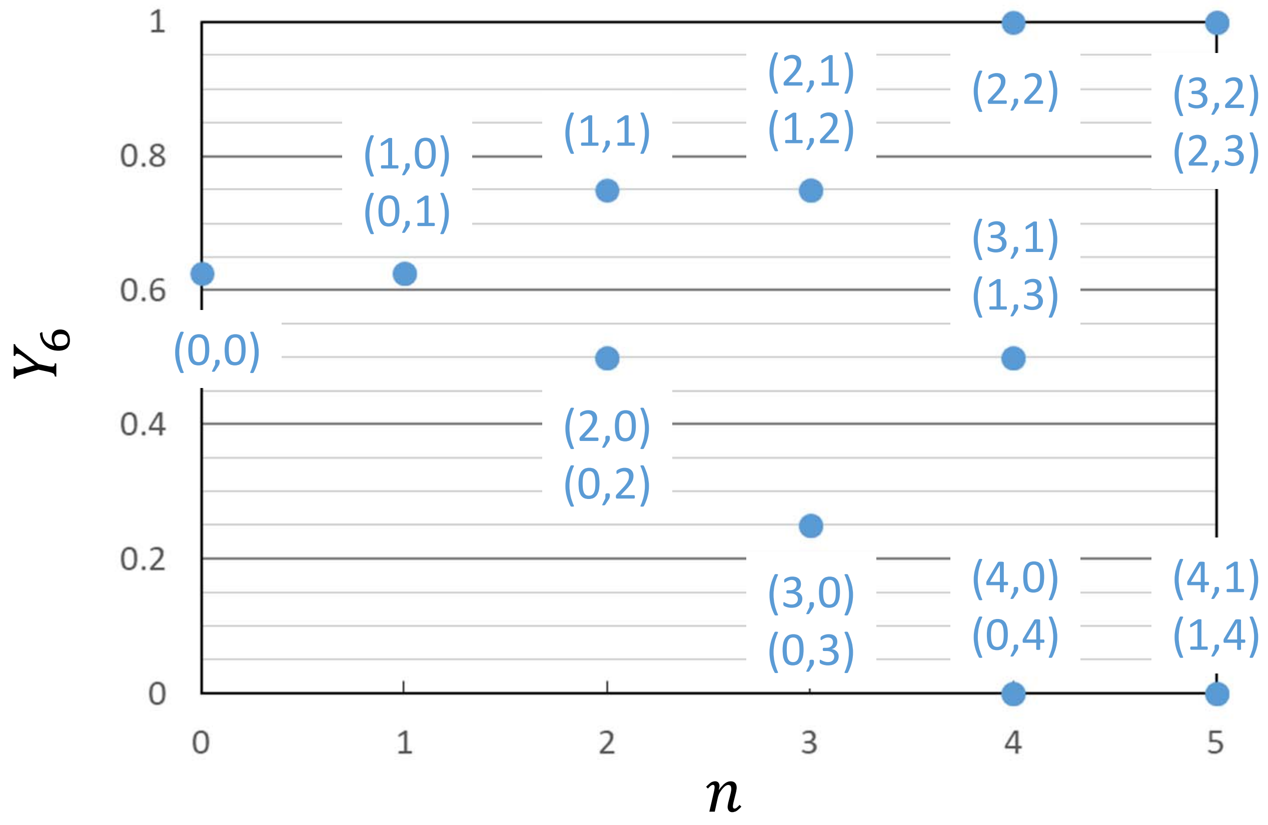


2勝2敗のときは、必ず第6戦が行われるので、p によらず確率は1になる

一方のチームが4勝すれば終わりなので、第6戦が行われる確率は0になる

第6戦が行われる確率

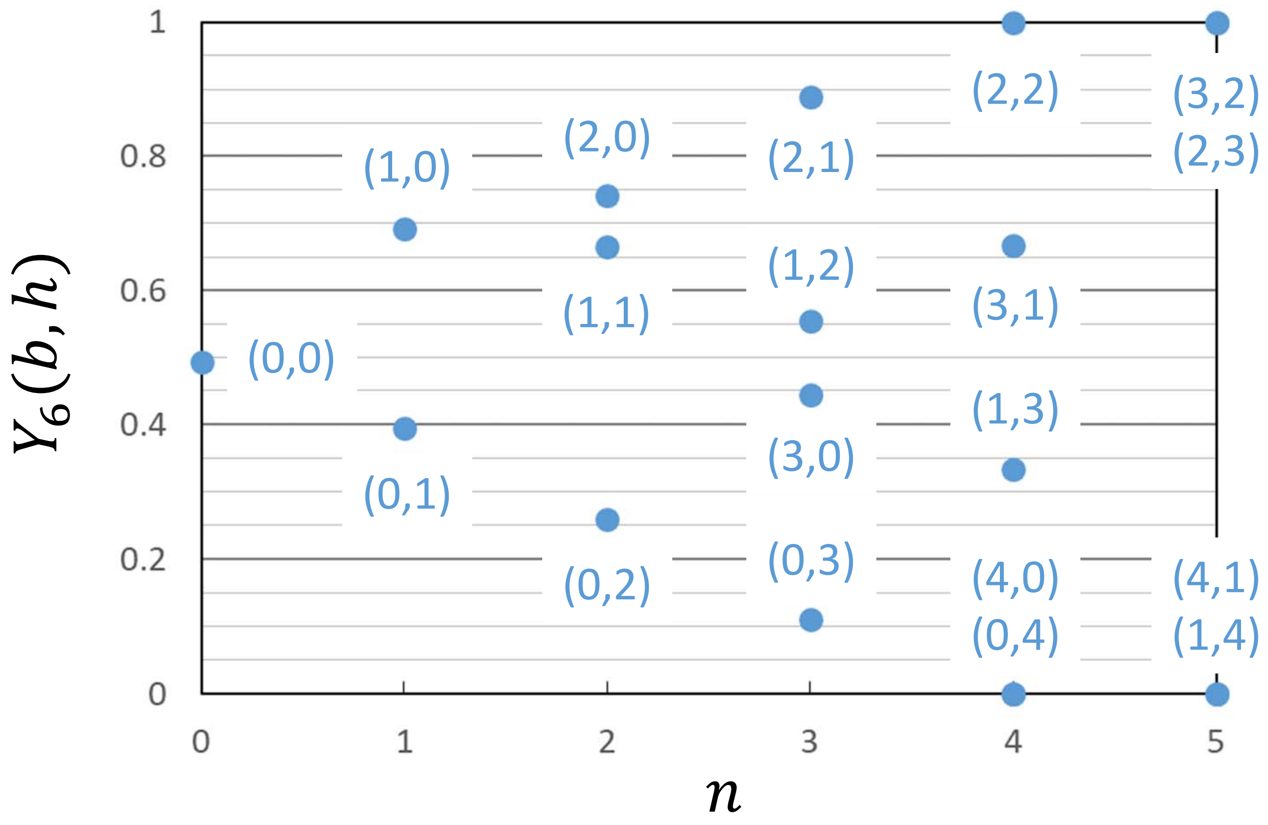
ベイスターズがホークスに勝つ確率を $p = \dfrac{1}{2}$ とすると、第 n 戦が終了した時点で、第6戦が行われる確率 Y_6 は下図のように推移する。



図中の数字は (b, h) を示す

第6戦が行われる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率を $p=\dfrac{1}{3}$ とすると、第 n 戦が終了した時点で、第6戦が行われる確率 Y_6 は下図のように推移する。



図中の数字は (b,h) を示す