第6戦が行われる確率

2017.10.29

渡邉 俊夫

問題

2017年、横浜DeNAベイスターズはプロ野球セントラル・リーグのクライマックスシリーズを勝ち抜いて19年ぶりに日本シリーズに進出し、パシフィック・リーグを制した福岡ソフトバンクホークスと対戦することになった。

神奈川県出身で鹿児島市在住のW氏は、11月4日土曜日に福岡ヤフオク！ドームで開催される日本シリーズ第6戦のビジター応援指定席のチケットを取ったのだが、日本シリーズはどちらかのチームが4勝した時点で優勝が決まり終了となる。

10月28日に日本シリーズが開幕し、第1戦、第2戦はホークスの連勝であった。

W氏が第6戦を観ることができる確率はどれだけか？

第4戦で終わる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率を p とする。引分は考えないものとすると、ホークスがベイスターズに勝つ確率は $1-p$ である。

第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、日本シリーズが最短で終わるのは、この後ホークスが第3戦から第4戦を連勝した場合であり、その確率は $(1-p)^2$ である。いっぽう、ベイスターズの4勝0敗となる可能性はないから、第4戦で終わる確率 X_4 は

$$X_4 = (1-p)^2$$

である。

第5戦で終わる確率

日本シリーズが第5戦で終わるのは、どちらかのチームが4勝1敗で優勝した場合である。第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、ベイスターズの4勝1敗となる可能性はない。いっぽう、ホークスの4勝1敗となるのは、第1戦から順に勝ちを○、負けを●で表すと、次の2通りである。

○○○●○、○○●○○

（4連勝したら第4戦で終わりなので、○○○○● はないことに注意。）

第1戦、第2戦のホークスの勝ちは確定しており、上記それぞれの確率はいずれも $(1-p)^2p$ であるから、ホークスが4勝1敗で優勝する確率は $2(1-p)^2p$ となる。したがって、第5戦で終わる確率 X_5 は

$$X_5 = 2(1-p)^2p$$

である。

第6戦が行われる確率

第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、

第4戦で終わる確率は　$X_4 = (1-p)^2$

第5戦で終わる確率は　$X_5 = 2(1-p)^2 p$

であるから、第6戦が行われる確率 Y_6 は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
Y_6 &= 1 - X_4 - X_5 \\
&= 1 - (1-p)^2 - 2(1-p)^2 p \\
&= 1 - (1-p)^2(1+2p) \\
&= 1 - \left((1 - 2p + p^2) + 2(p - 2p^2 + p^3)\right) \\
&= 3p^2 - 2p^3 \\
&= p^2(3-2p)
\end{aligned}
$$

第6戦が行われる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率 p を仮定して、第1戦、第2戦でホークスが連勝したときに第6戦が行われる確率 $Y_6 = p^2(3-2p)$を求めると、次のようになる。

$p = \dfrac{1}{2}$（両チームが互角）のときは

$$Y_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(3 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

$p = \dfrac{1}{3}$（1勝2敗ペース）のときは

$$Y_6 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(3 - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{27} = 25.9\ \%$$

補足：第6戦で終わる確率

第6戦で終わるのは、どちらかのチームが4勝2敗で優勝した場合である。
第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、ベイスターズの4勝2敗となるのは、この後ベイスターズが第3戦から第6戦を4連勝した場合のみであり、その確率は p^4 である。

いっぽう、ホークスの4勝2敗となるのは、次の3通りである。

○○○●●○、○○●○●○、○○●●○○、

第1戦、第2戦のホークスの勝ちは確定しており、上記それぞれの確率はいずれも $(1-p)^2p^2$ であるから、ホークスが4勝2敗で優勝する確率は $3(1-p)^2p^2$ となる。

したがって、第6戦で終わる確率 X_6 は

$$X_6 = p^4 + 3(1-p)^2p^2$$

である。

補足：第7戦が行われる確率

第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、第7戦が行われる確率 Y_7 は

$$
\begin{aligned}
Y_7 &= 1 - X_4 - X_5 - X_6 \\
&= Y_6 - X_6 \\
&= p^2(3-2p) - p^4 - 3(1-p)^2p^2 \\
&= p^2\left((3-2p) - p^2 - 3(1-2p+p^2)\right) \\
&= p^2(4p - 4p^2) \\
&= 4p^3(1-p)
\end{aligned}
$$

となる。

補足：第7戦で終わる確率①

第7戦で終わるのは、どちらかのチームが4勝3敗で優勝した場合である。
第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、ベイスターズの4勝3敗となるのは、次の4通りである。

●●○○○●○、●●○○●○○、●●○●○○○、●●●○○○○

第1戦、第2戦のベイスターズの負けは確定しており、上記それぞれの確率はいずれも $p^4(1-p)$ であるから、ベイスターズが4勝3敗で優勝する確率は $4p^4(1-p)$ となる。

いっぽう、ホークスの4勝3敗となるのは、次の4通りである。

○○○●●●○、○○●○●●○、○○●●○●○、○○●●●○○、

第1戦、第2戦のホークスの勝ちは確定しており、上記それぞれの確率はいずれも $(1-p)^2p^3$ であるから、ホークスが4勝3敗で優勝する確率は $4(1-p)^2p^3$ となる。

補足：第7戦で終わる確率②

第1戦、第2戦でホークスが連勝したとき、

ベイスターズが4勝3敗で優勝する確率は　$4p^4(1-p)$

ホークスが4勝3敗で優勝する確率は　$4(1-p)^2p^3$

であるから、第7戦で終わる確率 X_7 は

$$\begin{aligned} X_7 &= 4p^4(1-p) + 4(1-p)^2p^3 \\ &= 4p^3(1-p)\big(p + (1-p)\big) \\ &= 4p^3(1-p) \end{aligned}$$

となり、第7戦が行われる確率 Y_7 に等しい。これは、引分を考えていないため、第7戦が行われれば必ず第7戦で終わるからである。

補足：第5戦～第7戦が行われる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率を p とすると、第1戦、第2戦でホークスが連勝したときに第5戦、第6戦、第7戦が行われる確率は、それぞれ

$$Y_5 = 1 - (1-p)^2$$
$$= p(2-p)$$
$$Y_6 = p^2(3-2p)$$
$$Y_7 = 4p^3(1-p)$$

である。これをグラフで表すと右のようになる。