第6戦が行われる確率

2017.10.27

渡邉 俊夫

問題

2017年、横浜DeNAベイスターズはプロ野球セントラル・リーグのクライマックスシリーズを勝ち抜いて19年ぶりに日本シリーズに進出し、パシフィック・リーグを制した福岡ソフトバンクホークスと対戦することになった。

神奈川県出身で鹿児島市在住のW氏は、11月4日土曜日に福岡ヤフオク！ドームで開催される日本シリーズ第6戦のビジター応援指定席のチケットを取ったのだが、日本シリーズはどちらかのチームが4勝した時点で優勝が決まり終了となる。

W氏が第6戦を観ることができる確率はどれだけか？

第4戦で終わる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率を p とする。引分は考えないものとすると、ホークスがベイスターズに勝つ確率は $1-p$ である。

日本シリーズが最短で終わるのは、どちらかのチームが4連勝した場合である。ベイスターズが4連勝する確率は p^4、ホークスが4連勝する確率は $(1-p)^4$ であるから、第4戦で終わる確率 X_4 は

$$X_4 = p^4 + (1-p)^4$$

である。

第5戦で終わる確率

日本シリーズが第5戦で終わるのは、どちらかのチームが4勝1敗で優勝した場合である。ベイスターズの4勝1敗となるのは、第1戦から順に勝を〇、負を●で表すと、次の4通りである。

〇〇〇●〇、〇〇●〇〇、〇●〇〇〇、●〇〇〇〇

（4連勝したら第4戦で終わりなので、〇〇〇〇● はないことに注意。）

それぞれの確率はいずれも $p^4(1-p)$ であるから、ベイスターズが4勝1敗で優勝する確率は $4p^4(1-p)$ となる。同様に、ホークスが4勝1敗で優勝する確率は $4(1-p)^4p$ となる。

したがって、第5戦で終わる確率 X_5 は

$$X_5 = 4p^4(1-p) + 4(1-p)^4p$$

である。

第6戦が行われる確率

第4戦で終わる確率は　$X_4 = p^4 + (1-p)^4$

第5戦で終わる確率は　$X_5 = 4p^4(1-p) + 4(1-p)^4 p$

であるから、第6戦が行われる確率 Y_6 は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
Y_6 &= 1 - X_4 - X_5 \\
&= 1 - p^4 - (1-p)^4 - 4p^4(1-p) - 4(1-p)^4 p \\
&= \left((1+p^2)(1+p) - (1-p)^3\right)(1-p) - 4p(1-p)(p^3 + (1-p)^3) \\
&= (4p - 2p^2 + 2p^3)(1-p) - 4p(1-p)(1 - 3p + 3p^2) \\
&= 2p(1-p)\left((2 - p + p^2) - 2(1 - 3p + 3p^2)\right) \\
&= 10p^2(1-p)^2
\end{aligned}
$$

第6戦が行われる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率 p を仮定して、第6戦が行われる確率を求めると、次のようになる。

$p = \dfrac{1}{2}$ （両チームが互角）のときは

$$Y_6 = 10p^2(1-p)^2 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} = 62.5\ \%$$

$p = \dfrac{1}{3}$（1勝2敗ペース）のときは

$$Y_6 = 10p^2(1-p)^2 = 10\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{81} = 49.4\ \%$$

補足：第6戦で終わる確率

第6戦で終わるのは、どちらかのチームが4勝2敗で優勝した場合である。
ベイスターズの4勝2敗となるのは、次の10通りである。

○○○●●○、○○●○●○、○○●●○○、
○●○○●○、○●○●○○、○●●○○○、
●○○○●○、●○○●○○、●○●○○○、●●○○○○

それぞれの確率はいずれも$p^4(1-p)^2$であるから、ベイスターズが4勝2敗で優勝する確率は $10p^4(1-p)^2$となる。同様に、ホークスが4勝2敗で優勝する確率は $10(1-p)^4p^2$となる。

したがって、第6戦で終わる確率 X_6 は

$$X_6 = 10p^4(1-p)^2 + 10(1-p)^4p^2$$

である。

補足：第7戦が行われる確率

第7戦が行われる確率 Y_7 は

$$
\begin{aligned}
Y_7 &= 1 - X_4 - X_5 - X_6 \\
&= Y_6 - X_6 \\
&= 10p^2(1-p)^2 - 10p^4(1-p)^2 - 10(1-p)^4p^2 \\
&= 10p^2(1-p)^2(1 - p^2 - (1-p)^2) \\
&= 10p^2(1-p)^2(2p - 2p^2) \\
&= 20p^3(1-p)^3
\end{aligned}
$$

となる。

補足：第7戦で終わる確率

第7戦で終わるのは、どちらかのチームが4勝3敗で優勝した場合である。ベイスターズの4勝3敗となるのは、第1戦から第6戦までの6試合のうち、どこで3敗したかを考えると

$$ {}_6C_3 = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20\text{通り} $$

ある。それぞれの確率はいずれも$p^4(1-p)^3$であるから、ベイスターズが4勝3敗で優勝する確率は$20p^4(1-p)^3$となる。同様に、ホークスが4勝3敗で優勝する確率は$20(1-p)^4p^3$となる。

したがって、第7戦で終わる確率 X_7 は

$$ X_7 = 20p^4(1-p)^3 + 20(1-p)^4p^3 = 20p^3(1-p)^3 $$

となり、第7戦が行われる確率 Y_7 に等しい。これは、引分を考えていないため、第7戦が行われれば必ず第7戦で終わるからである。

補足：第7戦で終わる確率

ベイスターズの4勝3敗となる20通りを具体的に示すと、次のとおりである。

○○○●●●○、

○○●○●●○、○○●●○●○、○○●●●○○、

○●○○●●○、○●○●○●○、○●○●●○○、

○●●○○●○、○●●○●○○、○●●●○○○、

●○○○●●○、●○○●○●○、●○○●●○○、

●○●○○●○、●○●○●○○、●○●●○○○、

●●○○○●○、●●○○●○○、●●○●○○○、

●●●○○○○

補足：第5戦～第7戦が行われる確率

ベイスターズがホークスに勝つ確率が p のとき、第5戦、第6戦、第7戦が行われる確率は、それぞれ

$$Y_5 = 2p(1-p)(2-p+p^2)$$

$$Y_6 = 10p^2(1-p)^2$$

$$Y_7 = 20p^3(1-p)^3$$

である。これをグラフで表すと右のようになる。