楕円にひそむ平均

渡邉 俊夫

楕円

楕円は、2つの焦点からの距離の和が一定の点が描く曲線である。その方程式は
楕円の焦点を原点とする直交座標系では、

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

と表される。ここで、a は長半径、b は短半径、x_0 は中心と焦点との距離である。

また、楕円の焦点を原点とする極座標系では、

$$r=\frac{l}{1+\epsilon\cos\theta}$$

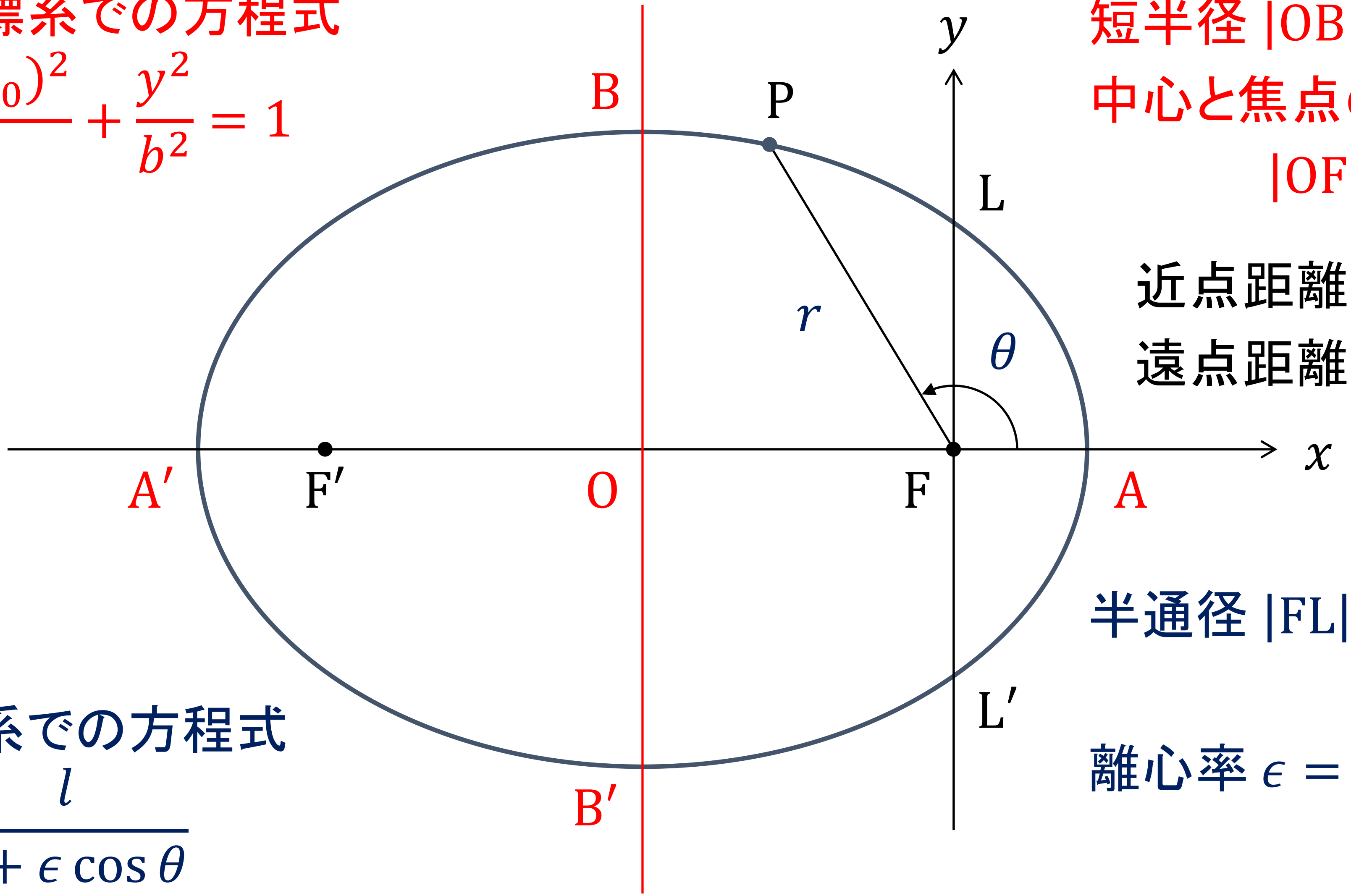
と表される。ここで、l は半通径、ϵ は離心率である。

本稿では、楕円の長半径 a、短半径 b、半通径 l が、**近点距離** r_1 と**遠点距離** r_2 の
（各種の）平均値になっていることを示す。

楕円の方程式

直交座標系での方程式

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



長半径 $|\mathrm{OA}| = |\mathrm{OA'}| = a$

短半径 $|\mathrm{OB}| = |\mathrm{OB'}| = b$

中心と焦点の距離

$$|\mathrm{OF}| = |\mathrm{OF'}| = x_0$$

近点距離 $|\mathrm{FA}| = |\mathrm{F'A'}| = r_1$

遠点距離 $|\mathrm{FA'}| = |\mathrm{F'A}| = r_2$

半通径 $|\mathrm{FL}| = |\mathrm{FL'}| = l$

離心率 $\epsilon = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}$

極座標系での方程式

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

楕円の長半径

楕円上の点 A(近点)において、2つの焦点 F, F' からの距離の和は

$$|\mathrm{FA}| + |\mathrm{F'A}| = |\mathrm{FA}| + |\mathrm{FA'}| = |\mathrm{OA}| + |\mathrm{OA'}| = |\mathrm{AA'}|$$

であるから

$$r_1 + r_2 = 2a$$

となる。これは、点 A'(遠点)において、2つの焦点からの距離の和を考えても同じである。

したがって、

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

であり、長半径 a は近点距離 r_1 と遠点距離 r_2 の算術平均(相加平均)である。

楕円の短半径

楕円上の点 B において、2つの焦点 F, F' からの距離の和は

$$|\mathrm{FB}| + |\mathrm{F'B}| = 2|\mathrm{FB}| = 2\sqrt{|\mathrm{OF}|^2 + |\mathrm{OB}|^2} = 2\sqrt{(|\mathrm{OA}| - |\mathrm{FA}|)^2 + |\mathrm{OB}|^2}$$

であり、これが $2a$ に等しいことから

$$2\sqrt{(a - r_1)^2 + b^2} = 2a$$

となる。したがって、

$$\sqrt{(a - r_1)^2 + b^2} = a$$

$$(a - r_1)^2 + b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - (a - r_1)^2 = 2ar_1 - {r_1}^2 = r_1(2a - r_1) = r_1 r_2$$

$$\therefore b = \sqrt{r_1 r_2}$$

であり、短半径 b は近点距離 r_1 と遠点距離 r_2 の幾何平均（相乗平均）である。

楕円の半通径

楕円上の点 L において、2つの焦点 F, F′ からの距離の和は

$$|\mathrm{FL}| + |\mathrm{F'L}| = |\mathrm{FL}| + \sqrt{|\mathrm{FL}|^2 + |\mathrm{FF'}|^2} = |\mathrm{FL}| + \sqrt{|\mathrm{FL}|^2 + (|\mathrm{FA'}| - |\mathrm{F'A'}|)^2}$$

であり、これが $2a$ に等しいことから

$$l + \sqrt{l^2 + (r_2 - r_1)^2} = 2a = r_1 + r_2$$

となる。したがって、

$$\sqrt{l^2 + (r_2 - r_1)^2} = r_1 + r_2 - l$$

$$l^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2 - l)^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2(r_1 + r_2)l + l^2$$

$$\therefore l = \frac{(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2}{2(r_1 + r_2)} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\therefore \frac{1}{l} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

であり、半通径 l は近点距離 r_1 と遠点距離 r_2 の調和平均である。

楕円の長半径・短半径・半通径

楕円の近点距離 $|\mathrm{FA}| = r_1$ と遠点距離 $|\mathrm{FA}'| = r_2$ について、

長半径 $|\mathrm{OA}| = a$ は算術平均(相加平均)

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

短半径 $|\mathrm{OB}| = b$ は幾何平均(相乗平均)

$$b = \sqrt{r_1 r_2}$$

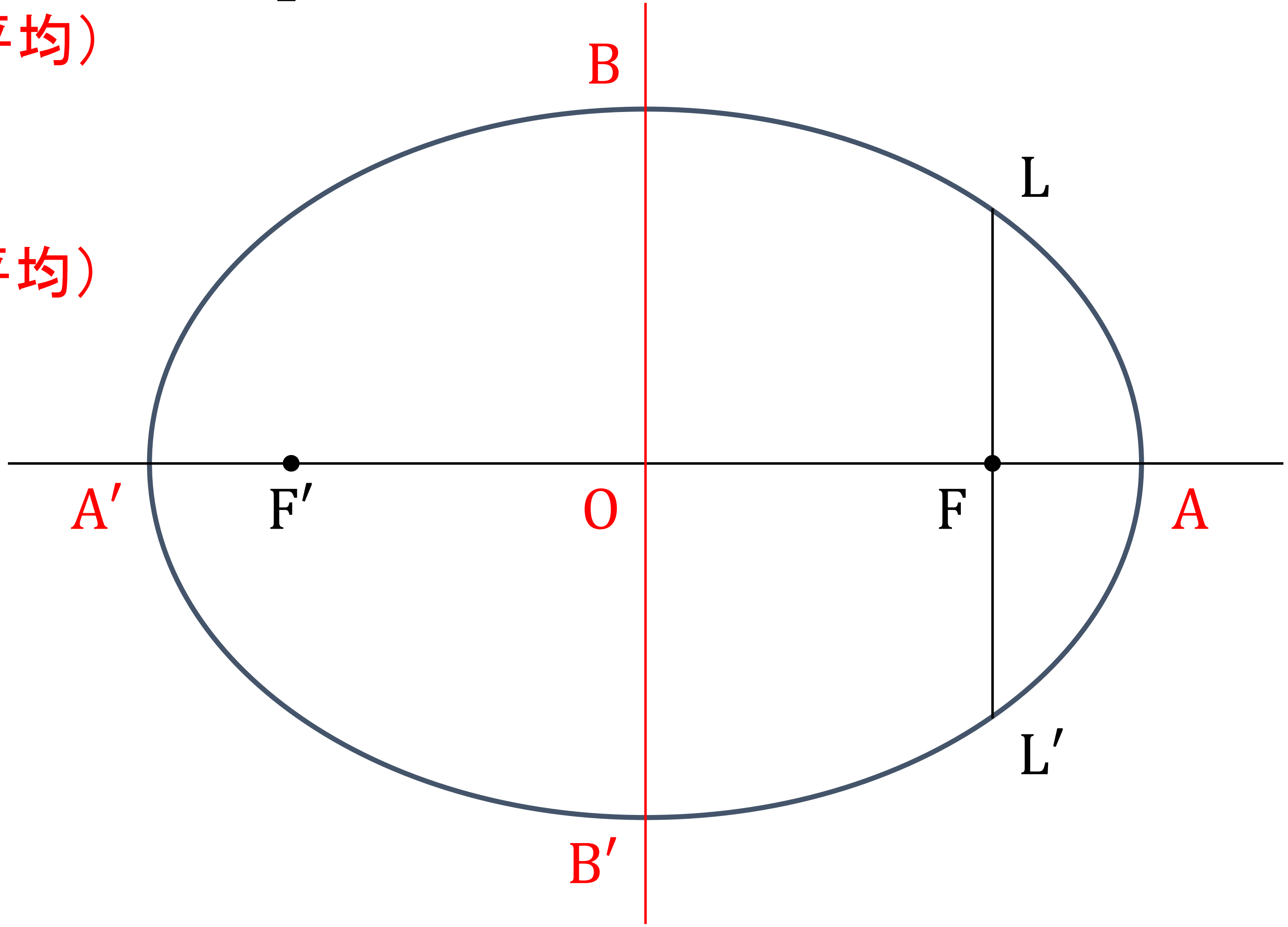
半通径 $|\mathrm{FL}| = l$ は調和平均

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

である。これらの値の間には

$$\frac{b^2}{a} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} = l \qquad \therefore l = \frac{b^2}{a}$$

が成り立つ。大小関係は $a \geq b \geq l$ であり、等号は $r_1 = r_2$ 、すなわち円の場合である。



楕円の離心率

楕円の離心率 ϵ を、近点距離 r_1 と遠点距離 r_2 を用いて表すと

$$\epsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{r_1 r_2}\right)^2}{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{(r_2 + r_1)^2 - 4r_1 r_2}{(r_2 + r_1)^2}} = \sqrt{\frac{(r_2 - r_1)^2}{(r_2 + r_1)^2}}$$

$$= \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

となる。したがって、離心率 ϵ は近点距離 r_1 と遠点距離 r_2 の和と差の比である。

算術平均・幾何平均・調和平均

一般に、2つの数値 x_1, x_2 の算術平均（相加平均）

$$A = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

に対して、幾何平均（相乗平均） G は

$$G = \sqrt{x_1 x_2} \qquad \therefore \log G = \frac{1}{2}(\log x_1 + \log x_2)$$

であるから、対数の平均である。

また、調和平均 H は

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

であるから、逆数の平均である。

m 乗平均

一般に、2つの数値 x_1, x_2 の m 乗平均を

$$\bar{x}_m{}^m = \frac{x_1{}^m + x_2{}^m}{2} \qquad \therefore \bar{x}_m = \sqrt[m]{\frac{x_1{}^m + x_2{}^m}{2}}$$

と定義すると、算術平均 A は $m = 1$、調和平均 H は $m = -1$ の場合に相当する。

また、$m \to 0$ のとき

$$x^m = e^{m \log x} = 1 + m \log x + \frac{1}{2!}(m \log x)^2 + \cdots$$

より

$$1 + m \log \bar{x}_m + \cdots = \frac{(1 + m \log x_1 + \cdots) + (1 + m \log x_2 + \cdots)}{2}$$

$$\therefore \log \bar{x}_m = \frac{\log x_1 + \log x_2}{2} = \log G$$

であるから、幾何平均 G は $m = 0$ の場合に相当する。