撓みは3乗、反りは2乗

渡邉 俊夫

板の撓みと反り

板に外力を与えて撓み(たわみ)を生じさせたときの曲げ半径の大きさから、板のヤング率を求めることができる。

いっぽう、板のヤング率が既知であれば、その表面に薄膜を堆積して反りが生じたときの曲げ半径の大きさから、堆積した薄膜の内部応力の大きさを求めることができる。

本稿では、この2つの場合で曲げ半径の板厚に対する依存性が異なり、撓みでは厚さの3乗、反りでは厚さの2乗に比例することを示す。

板の曲げ

厚さ d の板を上に凸に曲げたとき、上面では伸び、下面では縮んでいるから、その間に伸び縮みのない層がある。これを中立層という。

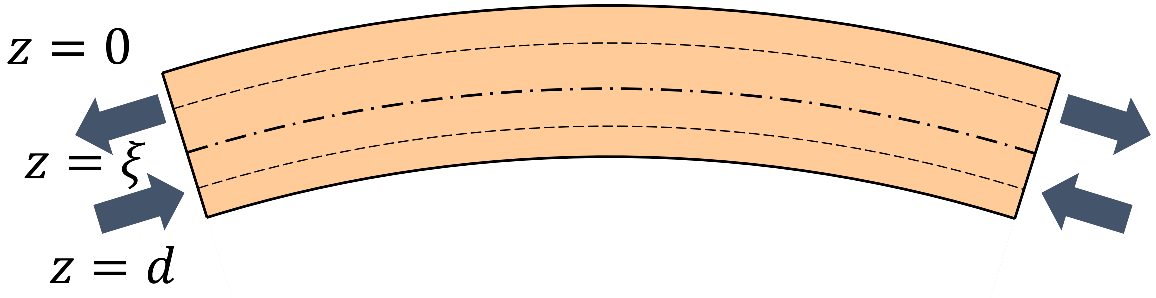
板の厚さ方向に z 軸をとって、上面を $z=0$、下面を $z=d$、中立層の位置を $z=\xi$ とする。曲げ半径を R、曲げ角を θ とすると、位置 z の層の歪み変形量は

$$\varepsilon = \frac{(R-z)d\theta - (R-\xi)d\theta}{(R-\xi)d\theta} = \frac{\xi - z}{R-\xi} \cong \frac{\xi - z}{R}$$

である。したがって、板の（奥行の）幅を a とすると、位置 z における断面積 adz の層に働く力 dT は、奥行方向の歪みの影響を無視すれば（ポアソン比 $\nu = 0$ に相当）、板のヤング率を E として

$$dT = E\varepsilon \cdot adz = \frac{Ea}{R}(\xi - z)dz$$

となる。$z<\xi$（上面側）では引張応力、$z>\xi$（下面側）では圧縮応力が働く。



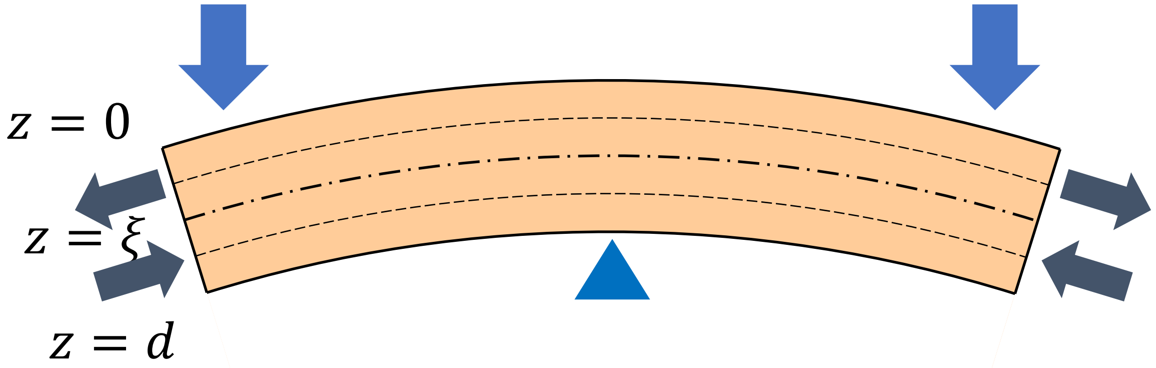
板の撓み

板面に垂直な外力を受けて板が撓んでいる場合、板の断面全体に働く力がつり合っていることから

$$T = \int_0^d dT = \int_0^d \frac{Ea}{R}(\xi - z)dz = \frac{Ea}{R}\left[\xi z - \frac{z^2}{2}\right]_0^d = \frac{Ea}{R}\left(\xi d - \frac{d^2}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \xi = \frac{d}{2}$$

この場合、中立層は板の厚さの
1/2 の位置にある。



板の撓み

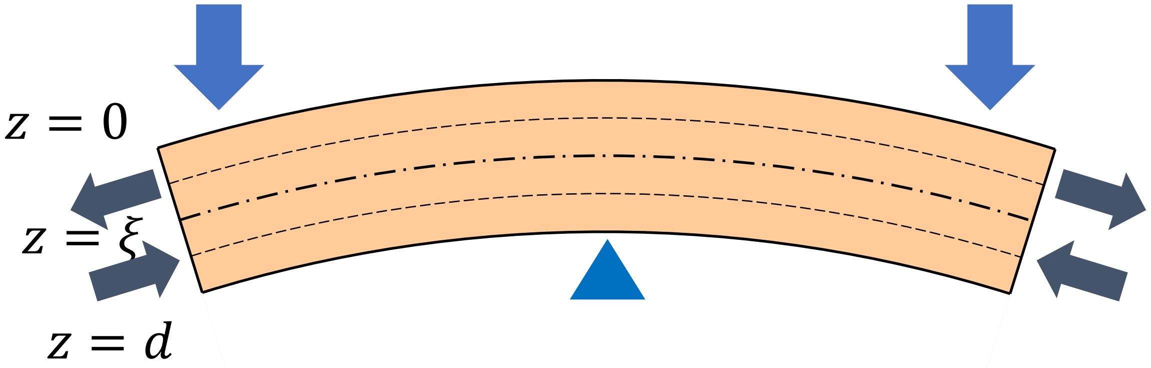
また、中立層($z = \xi$)に対する曲げモーメントと外力によるモーメント N がつり合っていることから

$$N = -\int_0^d (z-\xi)dT = \int_0^d \frac{Ea}{R}(z-\xi)^2 dz = \int_0^d \frac{Ea}{R}\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 dz$$

$$= \frac{Ea}{R}\left[\frac{1}{3}\left(z-\frac{d}{2}\right)^3\right]_0^d = \frac{Ea}{3R}\left\{\left(d-\frac{d}{2}\right)^3 - \left(-\frac{d}{2}\right)^3\right\} = \frac{Ea}{12R}d^3$$

$$\therefore R = \frac{Ea}{12N}d^3$$

この場合、曲げ半径 R は板厚 d の3乗に比例する。



板の反り

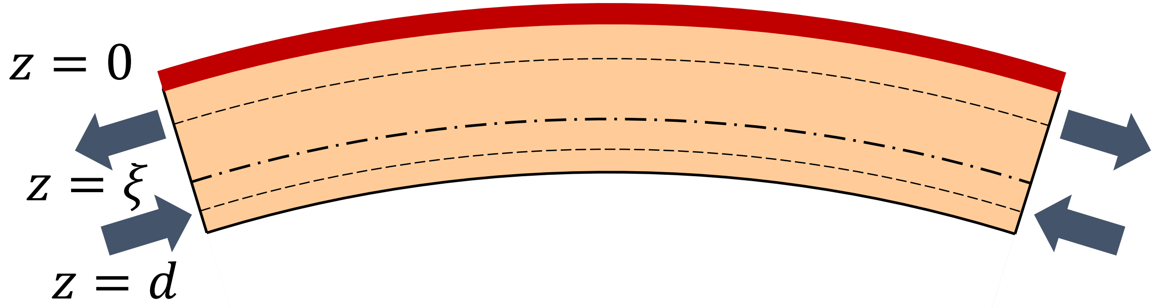
板の上面に堆積した薄膜の応力により板が反っている場合は、上面($z=0$)に対する曲げモーメントがつり合っていることから

$$0=\int_0^d zdT=\int_0^d \frac{Ea}{R}z(\xi-z)dz=\int_0^d \frac{Ea}{R}(\xi z-z^2)dz$$

$$=\frac{Ea}{R}\left[\frac{\xi z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_0^d=\frac{Ea}{R}\left(\frac{\xi d^2}{2}-\frac{d^3}{3}\right)=\frac{Ead^2}{R}\left(\frac{\xi}{2}-\frac{d}{3}\right)$$

$$\therefore \xi=\frac{2}{3}d$$

この場合、中立層は板の上面から厚さの 2/3 の位置にある。



板の反り

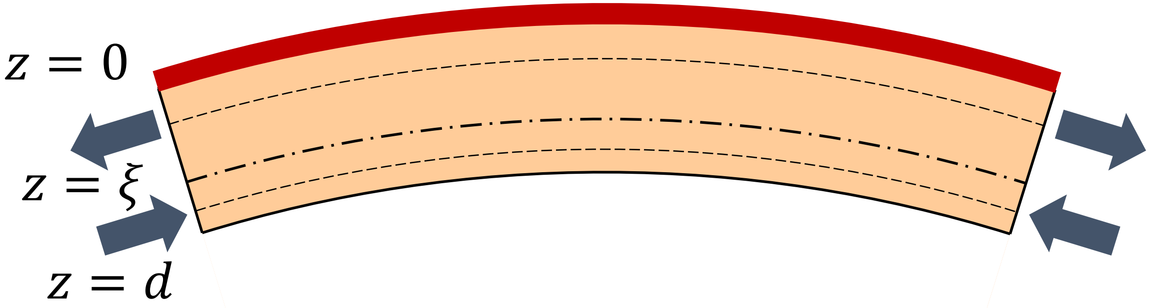
また、板の断面全体に働く力が薄膜（厚さ t）の応力 σ による力とつり合っていることから

$$\sigma \cdot at = \int_0^d dT = \int_0^d \frac{Ea}{R}(\xi - z)dz = \int_0^d \frac{Ea}{R}\left(\frac{2d}{3}z - z\right)dz$$

$$= \frac{Ea}{R}\left[\frac{2d}{3}z - \frac{z^2}{2}\right]_0^d = \frac{Ea}{R}\left(\frac{2d^2}{3} - \frac{d^2}{2}\right) = \frac{Ea}{6R}d^2$$

$$\therefore R = \frac{E}{6\sigma t}d^2$$

この場合、曲げ半径 R は板厚 d の2乗に比例する。



まとめ

- 板面に垂直な外力を受けて板が撓んでいる場合
  - ✓ 中立層は、板の厚さの1/2 の位置にある。
  - ✓ 曲げ半径は、板厚の3乗に比例する。
- 上面に堆積した薄膜の応力により板が反っている場合
  - ✓ 中立層は、板の上面から厚さの 2/3 の位置にある。
  - ✓ 曲げ半径は、板厚の2乗に比例する。

補足：ポアソン比

板のポアソン比 ν を考慮した場合、x 方向に応力 σ_x を印加すると、x 方向の歪み $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$ だけでなく、y 方向にも歪み $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E}$ が生じる。

同様に、y 方向に応力 σ_y を印加すると、y 方向の歪み $\varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E}$ だけでなく、x 方向にも歪み $\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_y}{E}$ が生じる。

したがって、σ_x と σ_y がともに存在するときの歪みは

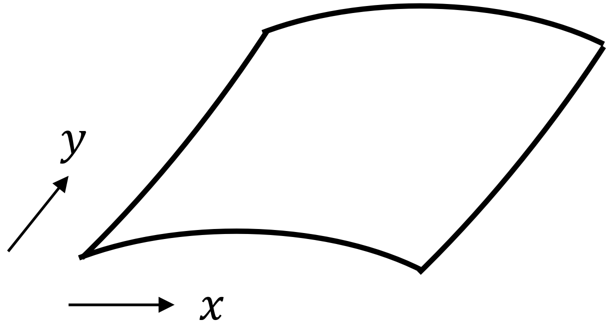
x 方向：$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}$$

y 方向：$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}$$

となる。

補足：単純曲げ

長方形の板を y 方向の曲げモーメントなしで曲げるときは、
$\sigma_y = 0$ であるから



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

となる。したがって、x 方向、y 方向の曲げ半径は

$$R_x = \frac{Ea}{12N}d^3$$

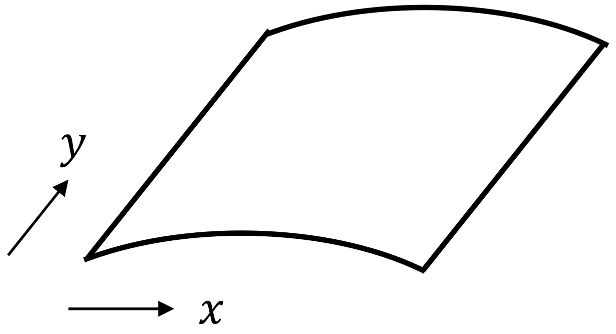
$$R_y = -\frac{Ea}{12\nu N}d^3 = -\frac{R_x}{\nu}$$

であり、y 方向の曲げは x 方向と逆符号になる。すなわち、x 方向へ上に凸に曲げたとき、y 方向へ下に凸の曲げが生じる。

補足：円筒曲げ

長方形の板を円筒状に曲げるときは、$\varepsilon_y = 0$ であるから

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = 0 \qquad \therefore \sigma_y = \nu\sigma_x$$



の応力が y 方向に存在し、

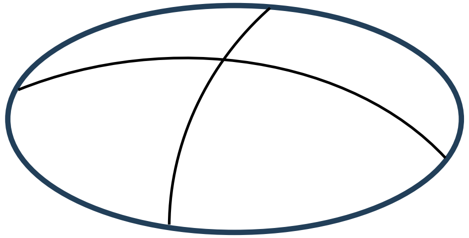
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x - \nu \cdot \nu\sigma_x}{E} = \frac{(1-\nu^2)\sigma_x}{E}$$

となる。したがって、外力により長方形の板を円筒状に撓ませた場合の曲げ半径は

$$R = \frac{Ea}{12(1-\nu^2)N} d^3$$

である。

補足：円板曲げ



円板が一様に曲がっているときは、$\sigma_x = \sigma_y$ であるから

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_x}{E} = \frac{(1-\nu)\sigma_x}{E}$$

となる。したがって、上面に堆積した薄膜の応力により円板が反っている場合の曲げ半径は

$$R = \frac{E}{6(1-\nu)\sigma t} d^2$$

である。

参考文献

- 永田一清、飯尾勝矩、宮田保教「基礎物理実験」東京教学社、1991.
- 松信八十男「変形と流れの力学」（基礎の物理 2）朝倉書店、1981.
- 村上敬宜「弾性力学」養賢堂、2012.
- G. Gerald Stoney, “The Tension of Metallic Films Deposited by Electrolysis,” Proc. Royal Soc. London, Series A, vol. 82, no. 553, pp. 172-175, 1909.
- 金原粲「真空・薄膜徒然草 5」 J. Vac. Soc. Jpn., vol. 53, no. 10, pp. 621-624, 2010.