

力と運動

—慣性抵抗—

渡邊 俊夫

概要

運動する物体にはたらく抵抗力が速度 v の2乗に比例し、 $F = -\kappa v^2$ (ただし、 κ は正の定数) で表されるとき、これを**慣性抵抗**という。

本稿では、慣性抵抗がはたらく物体の速度を表す式を、微分方程式を使って求める。

時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = v_0$ とすると、結果は以下のとおりである。

粘性抵抗のみがはたらく場合：

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \frac{\kappa}{m} t}$$

粘性抵抗と重力がはたらく場合：

$$v(t) = v_\infty \frac{(v_0 + v_\infty)e^{2\alpha t} + (v_0 - v_\infty)}{(v_0 + v_\infty)e^{2\alpha t} - (v_0 - v_\infty)}$$

$$\text{ただし、} v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{g\kappa}{m}}$$

慣性抵抗のみ

質量 m の物体に、速度 v の2乗に比例する慣性抵抗力 $F = -\kappa v^2$ のみがはたらく場合の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = F = -\kappa v^2$$

だから

$$-\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} = \frac{\kappa}{m}$$

両辺を時刻 $t = 0$ から時刻 t まで時間で積分して

$$\int_0^t \left(-\frac{1}{v^2} \right) \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t \frac{\kappa}{m} dt$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \left(-\frac{1}{v^2} \right) dv = \frac{\kappa}{m} \int_0^t dt$$

慣性抵抗のみ

$$\left[\frac{1}{v} \right]_{v(0)}^{v(t)} = \frac{\kappa}{m} [t]_0^t$$

$$\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v(0)} = \frac{\kappa}{m} t$$

時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = v_0$ とすると

$$\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0} = \frac{\kappa}{m} t$$

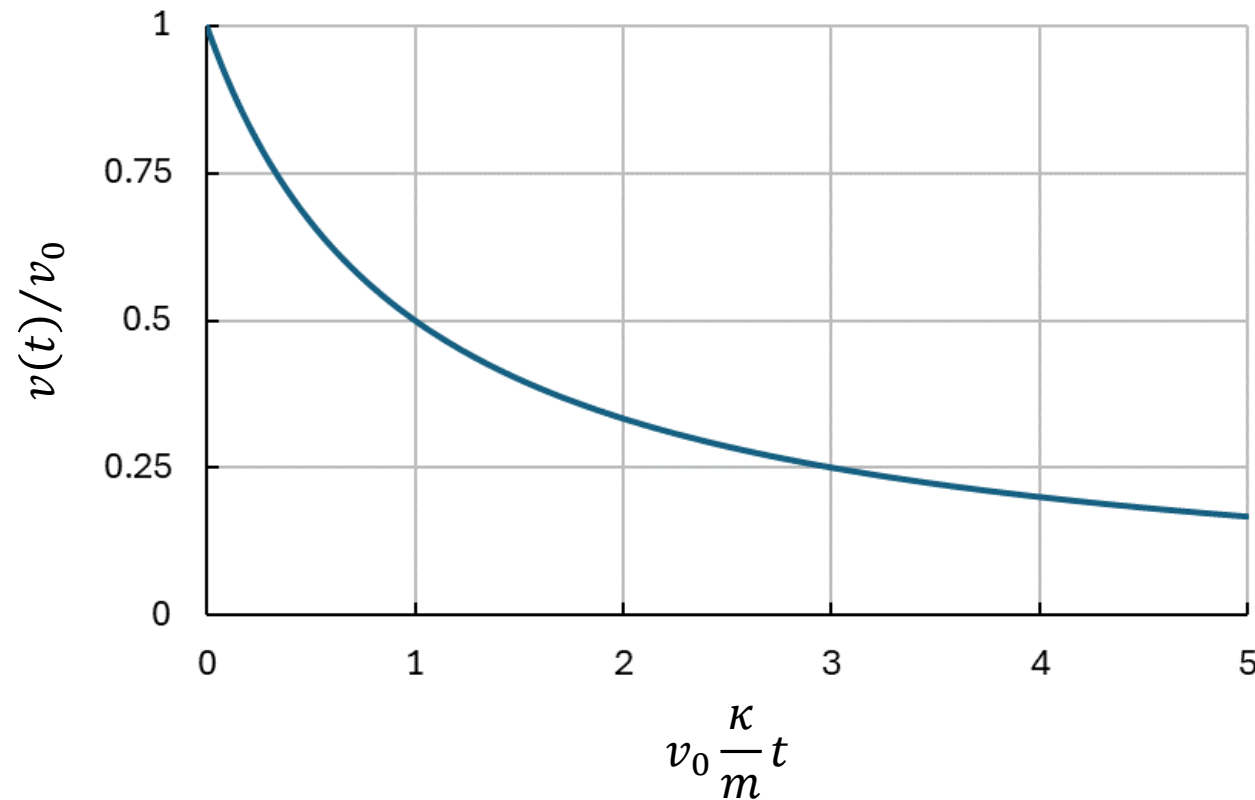
$$\therefore v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{\kappa}{m} t} = \frac{v_0}{1 + v_0 \frac{\kappa}{m} t}$$

物体の速度 v は時間とともに減少して 0 に近づく。

慣性抵抗のみ

速度 $v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \frac{\kappa}{m} t}$ のグラフは下図のようになる。

速度 v は時間 t とともに減少して 0 に近づく。



慣性抵抗と重力

慣性抵抗力 $F = -\kappa v^2$ に加えて、重力 mg がはたらく場合の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa v^2$$

だから

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\kappa}{m} v^2 = -\frac{\kappa}{m} \left(v^2 - \frac{mg}{\kappa} \right) = -\frac{\kappa}{m} (v^2 - v_\infty^2)$$

ただし、 $v_\infty^2 = \frac{mg}{\kappa}$ すなわち $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$ とした。これは $t \rightarrow \infty$ における終端速度を表す。

これより

$$-\frac{1}{v^2 - v_\infty^2} \frac{dv}{dt} = \frac{\kappa}{m}$$

慣性抵抗と重力

両辺を時刻 $t = 0$ から時刻 t まで時間で積分して

$$\int_0^t \frac{-1}{v^2 - v_\infty^2} \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t \frac{\kappa}{m} dt$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{-dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{\kappa}{m} \int_0^t dt$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{-dv}{v^2 - v_\infty^2} &= \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{-dv}{(v - v_\infty)(v + v_\infty)} = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{2v_\infty} \left(\frac{1}{v + v_\infty} - \frac{1}{v - v_\infty} \right) dv \\ &= \frac{1}{2v_\infty} \int_{v(0)}^{v(t)} \left(\frac{1}{v + v_\infty} - \frac{1}{v - v_\infty} \right) dv \end{aligned}$$

だから

慣性抵抗と重力

$$\frac{1}{2v_{\infty}} \int_{v(0)}^{v(t)} \left(\frac{1}{v + v_{\infty}} - \frac{1}{v - v_{\infty}} \right) dv = \frac{\kappa}{m} \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2v_{\infty}} [\log|v + v_{\infty}| - \log|v - v_{\infty}|]_{v(0)}^{v(t)} = \frac{\kappa}{m} [t]_0^t$$

$$\frac{1}{2v_{\infty}} \left[\log \left| \frac{v + v_{\infty}}{v - v_{\infty}} \right| \right]_{v(0)}^{v(t)} = \frac{\kappa}{m} t$$

$$\frac{1}{2v_{\infty}} \left(\log \left| \frac{v(t) + v_{\infty}}{v(t) - v_{\infty}} \right| - \log \left| \frac{v(0) + v_{\infty}}{v(0) - v_{\infty}} \right| \right) = \frac{\kappa}{m} t$$

$$\log \left| \frac{v(t) + v_{\infty}}{v(t) - v_{\infty}} \cdot \frac{v(0) - v_{\infty}}{v(0) + v_{\infty}} \right| = 2v_{\infty} \frac{\kappa}{m} t = 2\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{\kappa}{m} t = 2\sqrt{\frac{g\kappa}{m}} t$$

慣性抵抗と重力

時刻 $t = 0$ における初速度を $v(0) = v_0$ とすると

$$\log \left| \frac{v(t) + v_\infty}{v(t) - v_\infty} \cdot \frac{v_0 - v_\infty}{v_0 + v_\infty} \right| = 2 \sqrt{\frac{g\kappa}{m}} t$$

$$\log \left| \frac{v(t) + v_\infty}{v_0 + v_\infty} \cdot \frac{v_0 - v_\infty}{v(t) - v_\infty} \right| = 2 \sqrt{\frac{g\kappa}{m}} t$$

ここで、 $\alpha = \sqrt{\frac{g\kappa}{m}}$ とおくと

$$\log \left| \frac{v(t) + v_\infty}{v_0 + v_\infty} \cdot \frac{v_0 - v_\infty}{v(t) - v_\infty} \right| = 2\alpha t$$

$$\left| \frac{v(t) + v_\infty}{v_0 + v_\infty} \cdot \frac{v_0 - v_\infty}{v(t) - v_\infty} \right| = e^{2\alpha t}$$

慣性抵抗と重力

$v(t) + v_\infty, v(t) - v_\infty$ の符号が変わらない場合を考える。

$$\frac{v(t) + v_\infty}{v_0 + v_\infty} \cdot \frac{v_0 - v_\infty}{v(t) - v_\infty} = e^{2\alpha t}$$

$$\frac{v(t) + v_\infty}{v_0 + v_\infty} = \frac{v(t) - v_\infty}{v_0 - v_\infty} e^{2\alpha t}$$

$$v(t) \left(\frac{e^{2\alpha t}}{v_0 - v_\infty} - \frac{1}{v_0 + v_\infty} \right) = v_\infty \left(\frac{e^{2\alpha t}}{v_0 - v_\infty} + \frac{1}{v_0 + v_\infty} \right)$$

$$\therefore v(t) = v_\infty \frac{\frac{e^{2\alpha t}}{v_0 - v_\infty} + \frac{1}{v_0 + v_\infty}}{\frac{e^{2\alpha t}}{v_0 - v_\infty} - \frac{1}{v_0 + v_\infty}} = v_\infty \frac{(v_0 + v_\infty)e^{2\alpha t} + (v_0 - v_\infty)}{(v_0 + v_\infty)e^{2\alpha t} - (v_0 - v_\infty)}$$

物体の速度 v は時間 $t \rightarrow \infty$ で終端速度 v_∞ に近づく。

慣性抵抗と重力

$v(0) = v_0 = 0$ のときは

$$\begin{aligned} v(t) &= v_\infty \frac{(v_0 + v_\infty)e^{2\alpha t} + (v_0 - v_\infty)}{(v_0 + v_\infty)e^{2\alpha t} - (v_0 - v_\infty)} = v_\infty \frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1} = v_\infty \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}} \\ &= v_\infty \tanh \alpha t = v_\infty \tanh \sqrt{\frac{g\kappa}{m}} t \end{aligned}$$

となる。

慣性抵抗と重力

速度 $v(t) = v_{\infty} \frac{(v_0 + v_{\infty})e^{2\alpha t} + (v_0 - v_{\infty})}{(v_0 + v_{\infty})e^{2\alpha t} - (v_0 - v_{\infty})}$ のグラフは下図のようになる。

速度 v は時間 t とともに終端速度 v_{∞} に近づく。

