忘却曲線
ー微分方程式による導出ー

渡邉 俊夫

忘却曲線

人の記憶は、覚えた直後から急速に減少し、時間が経つにつれて緩やかに減少することが知られている。

エビングハウスは、記憶による学習の節約率 b の経過時間 t に対する変化について、次の実験式を得た。

$$b = \frac{k}{(\log t)^c + k}$$

ここで、$k = 1.84, c = 1.25$ である。

しかし、上式の根拠や k, c の値の意味は明確ではない。

本稿では、2つの仮定から、微分方程式を用いて、上式に代わる近似式の導出を試みる。

エビングハウスの実験結果

エビングハウスの実験では、記憶による学習の節約率は下表のような結果となった。

時間 (min)	時間 (h)	時間 (day)	節約率
20	0.33	0.0139	0.582
64	1.07	0.0444	0.442
526	8.77	0.365	0.358
1440	24	1	0.227
2880	48	2	0.278
8640	144	6	0.254
44640	744	31	0.211

エビングハウスの忘却曲線

エビングハウスは、実験結果の近似式として次の式を示した。

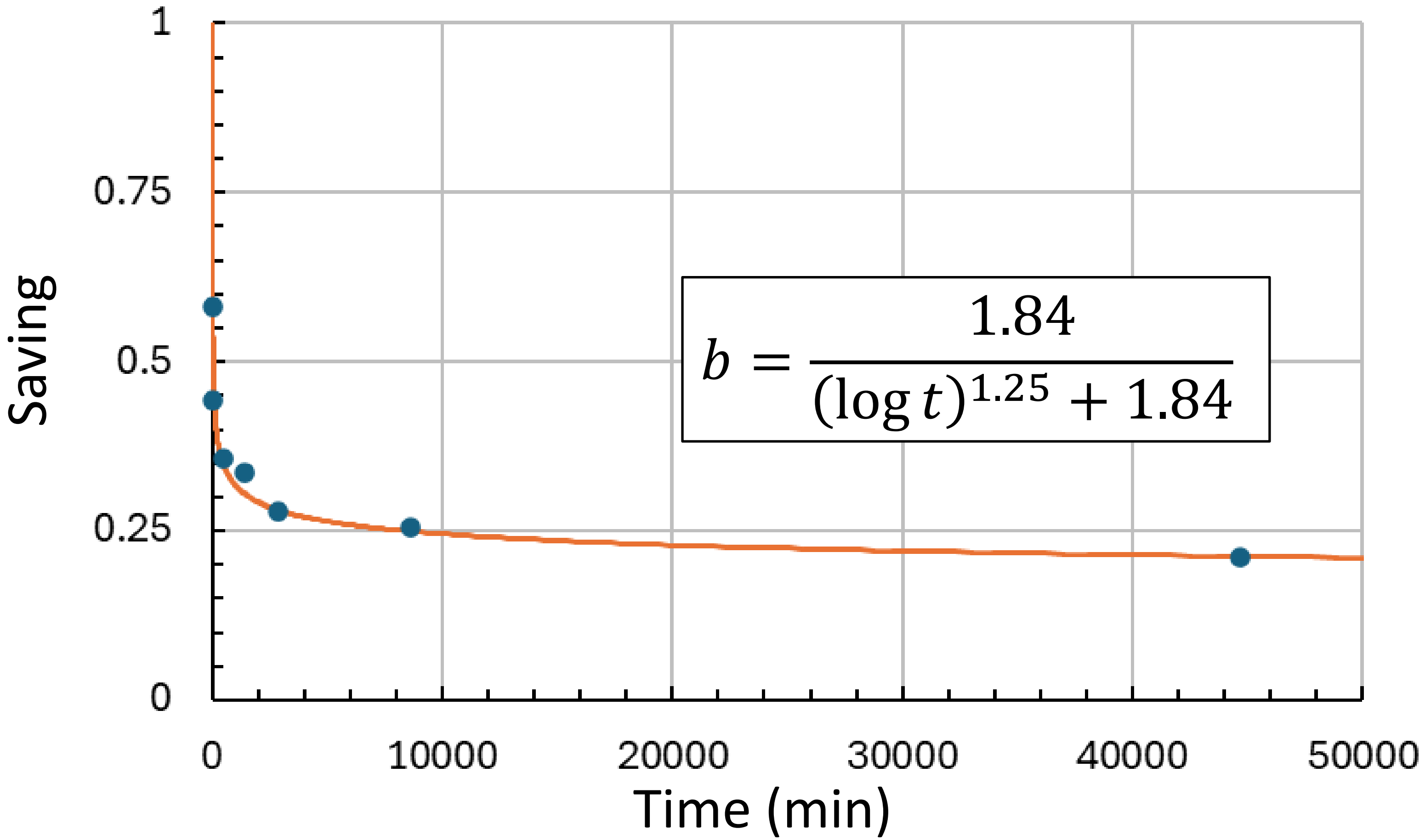
$$b = \frac{k}{(\log t)^c + k}$$

ここで、$k = 1.84, c = 1.25$ である。

なお、改めて b の偏差の二乗が最小になるように k と c の値を定めると、$k = 1.82, c = 1.21$ となる。

エビングハウスの忘却曲線

エビングハウスの式は、下図のように実験結果を良く近似している。



$$b = \frac{1.84}{(\log t)^{1.25} + 1.84}$$

エビングハウスの忘却曲線

エビングハウスの実験式

$$b = \frac{k}{(\log t)^c + k}, \quad k = 1.84, c = 1.25$$

は実験結果を良く近似しているが、その根拠や k, c の値の意味は明確でない。

そこで、以下では、2つの仮定から、上式に代わる近似式の導出を試みる。

忘却曲線の導出

記憶による学習の節約率 b は、感覚的な時間変化 $\Delta\tau$ に対して、単位時間あたり b の α 乗に比例して減少するものとする。

$$\Delta b \propto -b^{\alpha}\Delta\tau$$

また、感覚的な時間変化 $\Delta\tau$ は、実際の時間変化 Δt に対して、経過時間に反比例するものとする（ジャネーの法則）。

$$\Delta\tau \propto \frac{\Delta t}{t}$$

以上より、節約率 b の変化は、λ を定数として次式で表される。

$$\Delta b = -\lambda b^{\alpha}\frac{\Delta t}{t}$$

忘却曲線の導出

これより

$$-\frac{\Delta b}{b^{\alpha}} = \lambda \frac{\Delta t}{t}$$

$\Delta t \to 0$ として両辺を積分すると

$$-\int \frac{\mathrm{d}b}{b^{\alpha}} = \lambda \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

積分定数を C として

$$\frac{1}{\alpha b^{\alpha-1}} = \lambda \ln t + C \qquad \therefore b = \frac{1}{(\alpha\lambda \ln t + \alpha C)^{1/(\alpha-1)}}$$

忘却曲線の導出

$t=1$ で $b=1$ とすると、$C=1/\alpha$ であるから

$$b=\frac{1}{(\alpha\lambda\ln t+1)^{1/(\alpha-1)}}=\frac{1}{\left(\frac{\alpha\lambda}{\log_{10}e}\log_{10}t+1\right)^{1/(\alpha-1)}}$$

$K=\dfrac{\alpha\lambda}{\log_{10}e}$,　$\beta=\dfrac{1}{\alpha-1}$ とすれば

$$b=\frac{1}{(K\log_{10}t+1)^{\beta}}$$

を得る。

新たな忘却曲線

エビングハウスの実験結果を

$$b = \frac{1}{(K\log_{10} t + 1)^{\beta}}$$

で近似すると、$K = 0.277, \beta = 1.85$（すなわち、$\alpha = 1.54$）となる。

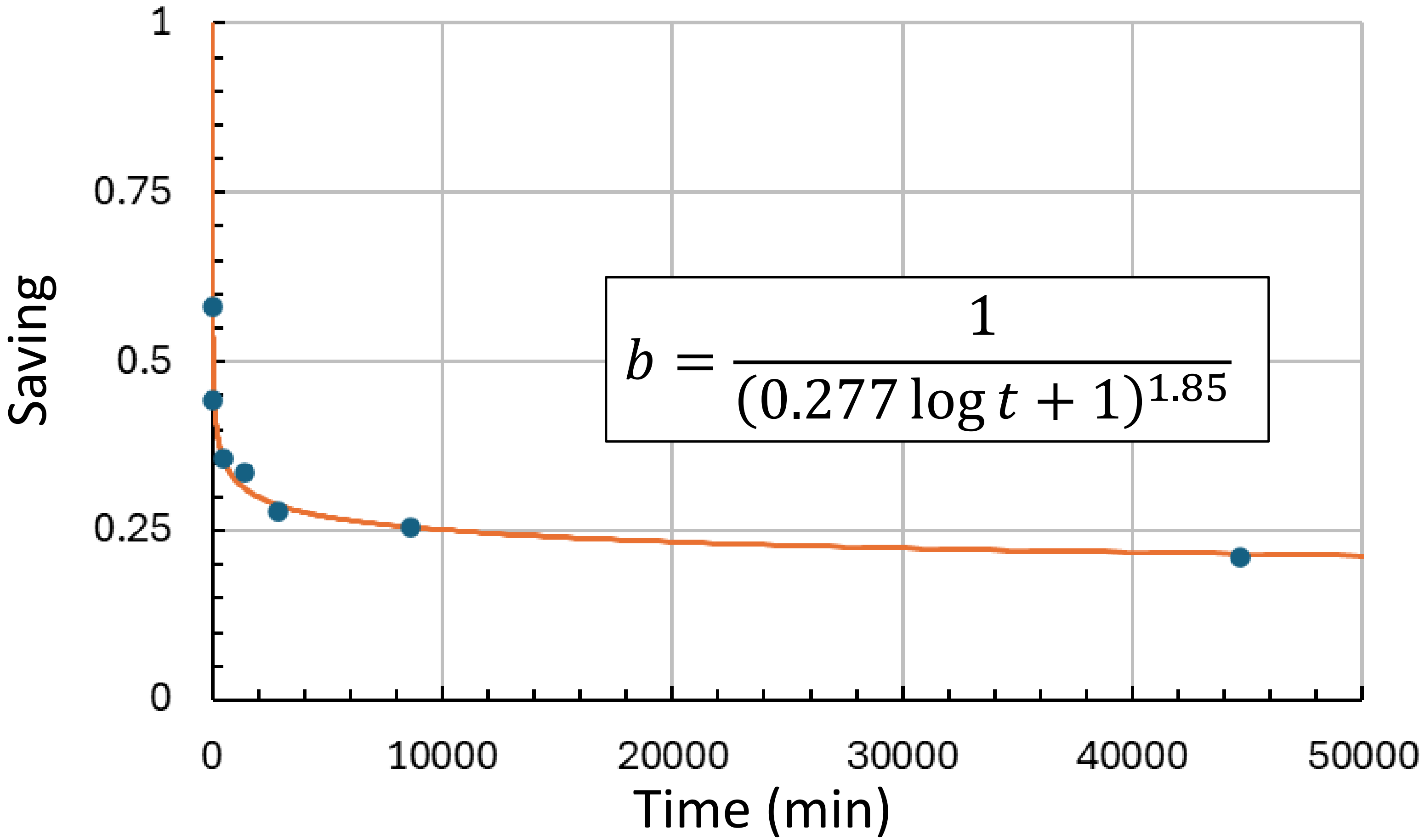
上式で $\beta = 1$（すなわち、$\alpha = 2$）のとき、$K = 1/k$ とすれば

$$b = \frac{1}{K\log_{10} t + 1} = \frac{k}{\log_{10} t + k}$$

となり、エビングハウスの実験式で $c = 1$ としたものに相当する。

新たな忘却曲線

今回導出された式も、下図のように実験結果を良く近似している。



$$b = \frac{1}{(0.277 \log t + 1)^{1.85}}$$

まとめ

次の2つの仮定から、微分方程式を用いて、記憶による学習の節約率 b の時間変化を表す式を求めた。

① 節約率 b は、感覚的な時間変化 $\Delta\tau$ に対して、単位時間あたり b の α 乗に比例して減少する。

② 感覚的な時間変化 $\Delta\tau$ は、実際の時間変化 Δt に対して、経過時間に反比例する（ジャネーの法則）。

その結果、$\beta = 1/(\alpha - 1)$ として、新たな近似式

$$b = \frac{1}{(K \log_{10} t + 1)^{\beta}}$$

が得られた。

参考文献

- Hermann Ebbinghaus, “Memory: A Contribution to Experimental Psychology,” 1885, Translated by Henry A. Ruger and Clara E. Bussenius, New York, Teachers College, Columbia University, 1913, chap. 7.
- Jaap M. J. Murre and Joeri Dros, ”Replication and Analysis of Ebbinghaus’ Forgetting Curve,” PLoS ONE, vol. 10, no. 7, e0120644, 2015.
- 深見武彦「エビングハウスが式に付けた冪数1.25 は必要か」日本心理学会第82回大会, 1AM-050, 2018.
- Pierre Janet, ”L’évolution de la mémoire et de la notion du temps,” Paris, Chahine, 1928, p. 515.