

カッシーニの卵

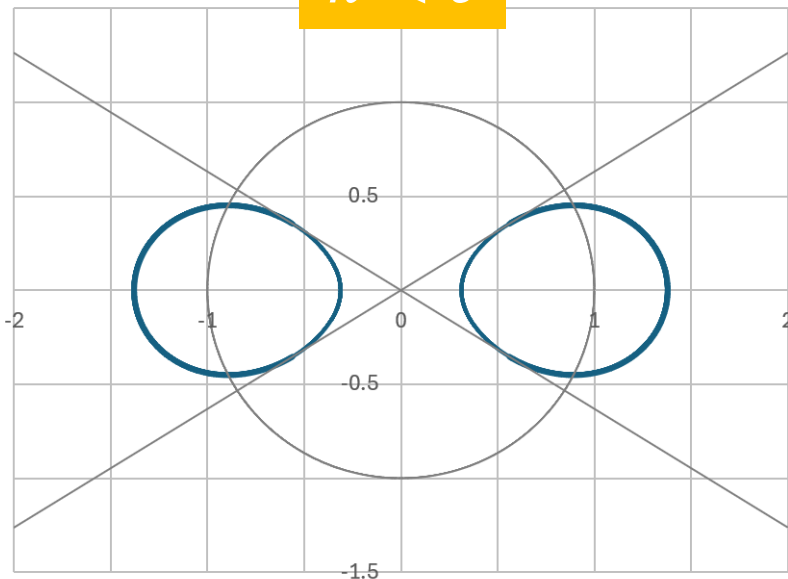
—2点からの距離の積が一定の曲線—

渡邊 俊夫

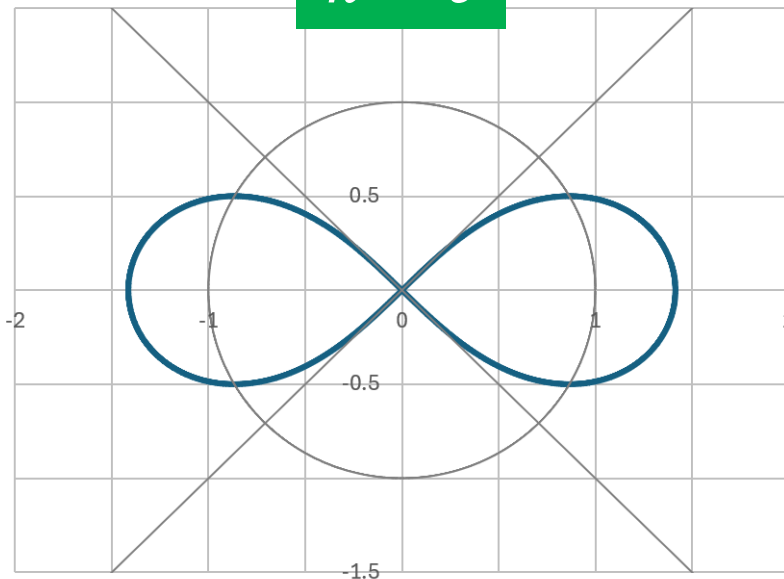
概要

2点からの距離の積が等しい点の集合が描く曲線を、**カッシーニの卵形線**という。この曲線は、2点間の距離 c と2点からの距離の積の平方根 k との大小関係によって下の3つに分類される。特に、 $k = c$ の場合の曲線を**レムニスケート**という。

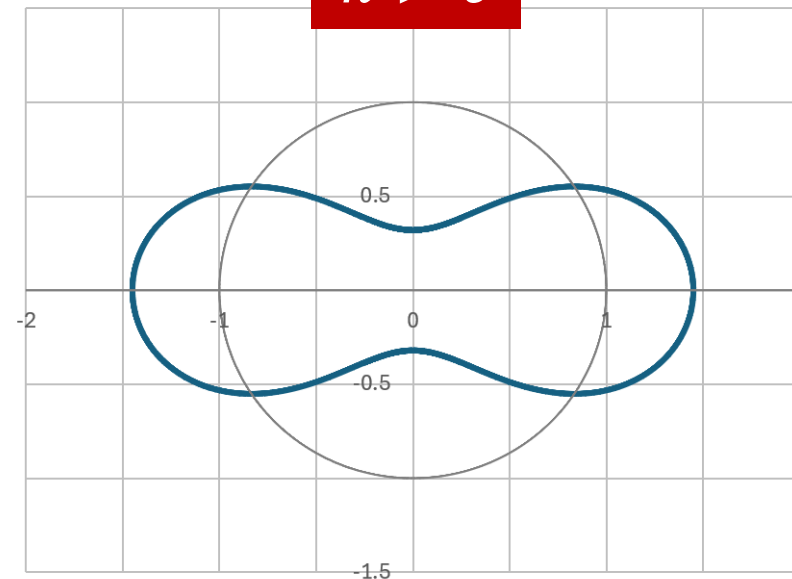
$$k < c$$



$$k = c$$



$$k > c$$



直交座標での方程式

x 軸上に2点を取り、その座標を $(-c, 0)$, $(c, 0)$ とすると、2点からの距離の積が等しい点の座標 (x, y) は、 k を正の定数として

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = k^2$$

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = k^4$$

$$(x+c)^2(x-c)^2 + ((x+c)^2 + (x-c)^2)y^2 + y^4 = k^4$$

$$(x^2 - c^2)^2 + 2(x^2 + c^2)y^2 + y^4 = k^4$$

$$x^4 - 2c^2x^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 + y^4 = k^4$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + c^4 - k^4 = 0$$

$$\therefore (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

極座標での方程式

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

を $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ として極座標で表すと、 $x^2 + y^2 = r^2$ だから

$$r^4 - 2c^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) + c^4 - k^4 = 0$$

$$r^4 - 2c^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + c^4 - k^4 = 0$$

$$\therefore r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - k^4 = 0$$

さらに変形すると

$$(r^2 - c^2 \cos 2\theta)^2 - c^4 \cos^2 2\theta + c^4 - k^4 = 0$$

$$(r^2 - c^2 \cos 2\theta)^2 + c^4 (1 - \cos^2 2\theta) - k^4 = 0$$

$$\therefore (r^2 - c^2 \cos 2\theta)^2 + c^4 \sin^2 2\theta - k^4 = 0$$

対称性

直交座標での曲線の方程式を

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

とすると、

$f(x, -y) = f(x, y)$ より、曲線は x 軸に関して線対称である。

$f(-x, y) = f(x, y)$ より、曲線は y 軸に関して線対称である。

$f(-x, -y) = f(x, y)$ より、曲線は原点に関して点対称である。

x 軸との交点

曲線と x 軸との交点は、 $y = 0$ より

$$x^4 - 2c^2x^2 + c^4 - k^4 = 0$$

$$(x^2 - c^2)^2 - k^4 = 0$$

$$(x^2 - c^2)^2 = k^4$$

$$x^2 - c^2 = \pm k^2$$

$$\therefore x^2 = c^2 \pm k^2$$

$k < c$ のとき、曲線は4点 $x = \pm\sqrt{c^2 - k^2}, \pm\sqrt{c^2 + k^2}$ で x 軸と交わる。

$k = c$ のとき、曲線は3点 $x = 0, \pm\sqrt{c^2 + k^2}$ で x 軸と交わる。

$k > c$ のとき、曲線は2点 $x = \pm\sqrt{c^2 + k^2}$ で x 軸と交わる。

y 軸との交点

曲線と y 軸との交点は、 $x = 0$ より

$$y^4 + 2c^2y^2 + c^4 - k^4 = 0$$

$$(y^2 + c^2)^2 - k^4 = 0$$

$$(y^2 + c^2)^2 = k^4$$

$$y^2 + c^2 = \pm k^2 \quad \text{ただし、} y^2 + c^2 > 0 \text{ より負号は不可}$$

$$\therefore y^2 = k^2 - c^2$$

$k < c$ のとき、曲線は y 軸と交点をもたない。

$k = c$ のとき、曲線は1点 $y = 0$ で y 軸と交わる。

$k > c$ のとき、曲線は2点 $y = \pm\sqrt{k^2 - c^2}$ で y 軸と交わる。

$x = \pm c$ での y の値

$x = \pm c$ のとき

$$\left((\pm c)^2 + y^2\right)^2 - 2c^2\left((\pm c)^2 - y^2\right) + c^4 - k^4 = 0$$

$$(c^2 + y^2)^2 - 2c^2(c^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

$$(c^4 + 2c^2y^2 + y^4) - 2c^4 + 2c^2y^2 + c^4 - k^4 = 0$$

$$y^4 + 4c^2y^2 - k^4 = 0$$

$$y^4 + 4c^2y^2 = k^4$$

$$(y^2 + 2c^2)^2 = 4c^4 + k^4$$

$$y^2 + 2c^2 = \pm\sqrt{4c^4 + k^4} \quad \text{ただし、} y^2 + 2c^2 > 0 \text{ より負号は不可}$$

$$\therefore y^2 = -2c^2 + \sqrt{4c^4 + k^4}$$

y の値の範囲

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

より、 x^2 の2次方程式

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + c^4 - k^4 = 0$$

$$x^4 + 2x^2y^2 - 2c^2x^2 + y^4 + 2c^2y^2 + c^4 - k^4 = 0$$

$$x^4 + 2(y^2 - c^2)x^2 + (y^2 + c^2)^2 - k^4 = 0$$

が実数解をもつためには

$$(y^2 - c^2)^2 - ((y^2 + c^2)^2 - k^4) \geq 0$$

$$(y^2 - c^2)^2 - (y^2 + c^2)^2 + k^4 \geq 0$$

$$-4c^2y^2 + k^4 \geq 0$$

y の値の範囲

これより

$$4c^2y^2 \leq k^4 \quad \therefore y^2 \leq \frac{k^4}{4c^2}$$

したがって、 y のとりうる値の範囲は

$$-\frac{k^2}{2c} \leq y \leq \frac{k^2}{2c}$$

y が極値をとる点

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

の両辺を x で微分すると

$$2(x^2 + y^2) \cdot \left(2x + 2y \frac{dy}{dx}\right) - 2c^2 \cdot \left(2x - 2y \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$(x^2 + y^2) \left(x + y \frac{dy}{dx}\right) - c^2 \left(x - y \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$(x^2 + y^2 + c^2)y \frac{dy}{dx} + (x^2 + y^2 - c^2)x = 0$$

したがって、円 $x^2 + y^2 = c^2$ との交点、および $x = 0$ で $dy/dx = 0$ となり、 $y = f(x)$ は極値をとる。

y が極値をとる点

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

と円 $x^2 + y^2 = c^2$ との交点は

$$(x^2 + (c^2 - x^2))^2 - 2c^2(x^2 - (c^2 - x^2)) + c^4 - k^4 = 0$$

$$c^4 - 2c^2(2x^2 - c^2) + c^4 - k^4 = 0$$

$$-4c^2x^2 + 4c^2 - k^4 = 0$$

$$4c^2x^2 = 4c^2 - k^4$$

$$\therefore x^2 = c^2 - \frac{k^4}{4c^2} \quad \therefore y^2 = c^2 - x^2 = \frac{k^4}{4c^2}$$

y が極値をとる点

$k^4 \leq 4c^4$ 、すなわち $k \leq \sqrt{2}c$ のとき、

曲線は $x = \pm \sqrt{c^2 - \frac{k^4}{4c^2}} = \pm c \sqrt{1 - \frac{k^4}{4c^4}}$ で円 $x^2 + y^2 = c^2$ と交わり、

その交点で y は極値 $y = \pm \frac{k^2}{2c}$ をとる。

さらに、 $c < k \leq \sqrt{2}c$ のとき、曲線は $x = 0$ で y 軸と交わり、その交点で y は極値 $y = \pm \sqrt{k^2 - c^2}$ をとる。

$k > \sqrt{2}c$ のとき、曲線は円 $x^2 + y^2 = c^2$ と交点をもたず、 y が極値をとるのは y 軸との交点 ($x = 0$) のみである。

x が極値をとる点

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

の両辺を y で微分すると

$$2(x^2 + y^2) \cdot \left(2x \frac{dx}{dy} + 2y \right) - 2c^2 \cdot \left(2x \frac{dx}{dy} - 2y \right) = 0$$

$$(x^2 + y^2) \left(x \frac{dx}{dy} + y \right) - c^2 \left(x \frac{dx}{dy} - y \right) = 0$$

$$(x^2 + y^2 - c^2)x \frac{dx}{dy} + (x^2 + y^2 + c^2)y = 0$$

したがって、 $y = 0$ (x 軸上) で $dx/dy = 0$ となり、 $x = f^{-1}(y)$ は極値をとる。

原点を通る接線

曲線の方程式を x で微分した式

$$(x^2 + y^2 + c^2)y \frac{dy}{dx} + (x^2 + y^2 - c^2)x = 0$$

より、曲線が原点を通る直線 $y = px$ と接するのは

$$(x^2 + (px)^2 + c^2) \cdot px \cdot p + (x^2 + (px)^2 - c^2)x = 0$$

$$(x^2 + p^2x^2 + c^2) \cdot p^2x + (x^2 + p^2x^2 - c^2)x = 0$$

$$((x^2 + p^2x^2 + c^2)p^2 + (x^2 + p^2x^2 - c^2))x = 0$$

$$(((1 + p^2)x^2 + c^2)p^2 + ((1 + p^2)x^2 - c^2))x = 0$$

$$((1 + p^2)^2x^2 - (1 - p^2)c^2)x = 0$$

原点を通る接線

$$\therefore x^2 = \frac{(1 - p^2)c^2}{(1 + p^2)^2} \quad \text{ただし、} x^2 \geq 0 \text{ より } p^2 < 1$$

$$\therefore y^2 = (px)^2 = \frac{(1 - p^2)p^2c^2}{(1 + p^2)^2}$$

これより

$$x^2 + y^2 = \frac{(1 - p^2)c^2}{(1 + p^2)^2} + \frac{(1 - p^2)p^2c^2}{(1 + p^2)^2} = \frac{(1 - p^2)c^2}{1 + p^2}$$

$$x^2 - y^2 = \frac{(1 - p^2)c^2}{(1 + p^2)^2} - \frac{(1 - p^2)p^2c^2}{(1 + p^2)^2} = \frac{(1 - p^2)^2c^2}{(1 + p^2)^2}$$

だから

原点を通る接線

$$\left(\frac{(1-p^2)c^2}{1+p^2}\right)^2 - 2c^2 \frac{(1-p^2)^2 c^2}{(1+p^2)^2} + c^4 - k^4 = 0$$

$$- c^2 \frac{(1-p^2)^2 c^2}{(1+p^2)^2} + c^4 - k^4 = 0$$

$$\frac{(1-p^2)^2 c^4}{(1+p^2)^2} = c^4 - k^4$$

$$\frac{(1-p^2)c^2}{1+p^2} = \pm \sqrt{c^4 - k^4} \quad \text{ただし、左辺} \geq 0 \text{ より負号は不可}$$

$$\therefore \frac{(1-p^2)c^2}{1+p^2} = \sqrt{c^4 - k^4}$$

原点を通る接線

$$(1 - p^2)c^2 = \sqrt{c^4 - k^4}(1 + p^2)$$

$$(c^2 + \sqrt{c^4 - k^4})p^2 = c^2 - \sqrt{c^4 - k^4}$$

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - k^4}}{c^2 + \sqrt{c^4 - k^4}} = \frac{(c^2 - \sqrt{c^4 - k^4})^2}{c^4 - (c^4 - k^4)} \\ &= \frac{c^4 + (c^4 - k^4) - 2c^2\sqrt{c^4 - k^4}}{k^4} = \frac{2c^4 - 2c^2\sqrt{c^4 - k^4} - k^4}{k^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{2c^4}{k^4} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{k^4}{c^4}} \right) - 1$$

$k \leq c$ のとき、曲線は直線 $y = px$ と接する。

曲線の分類

以上より、2点からの距離の積が等しい点の集合が描く曲線は、次のようになる。これらをカッシーニの卵形線という。

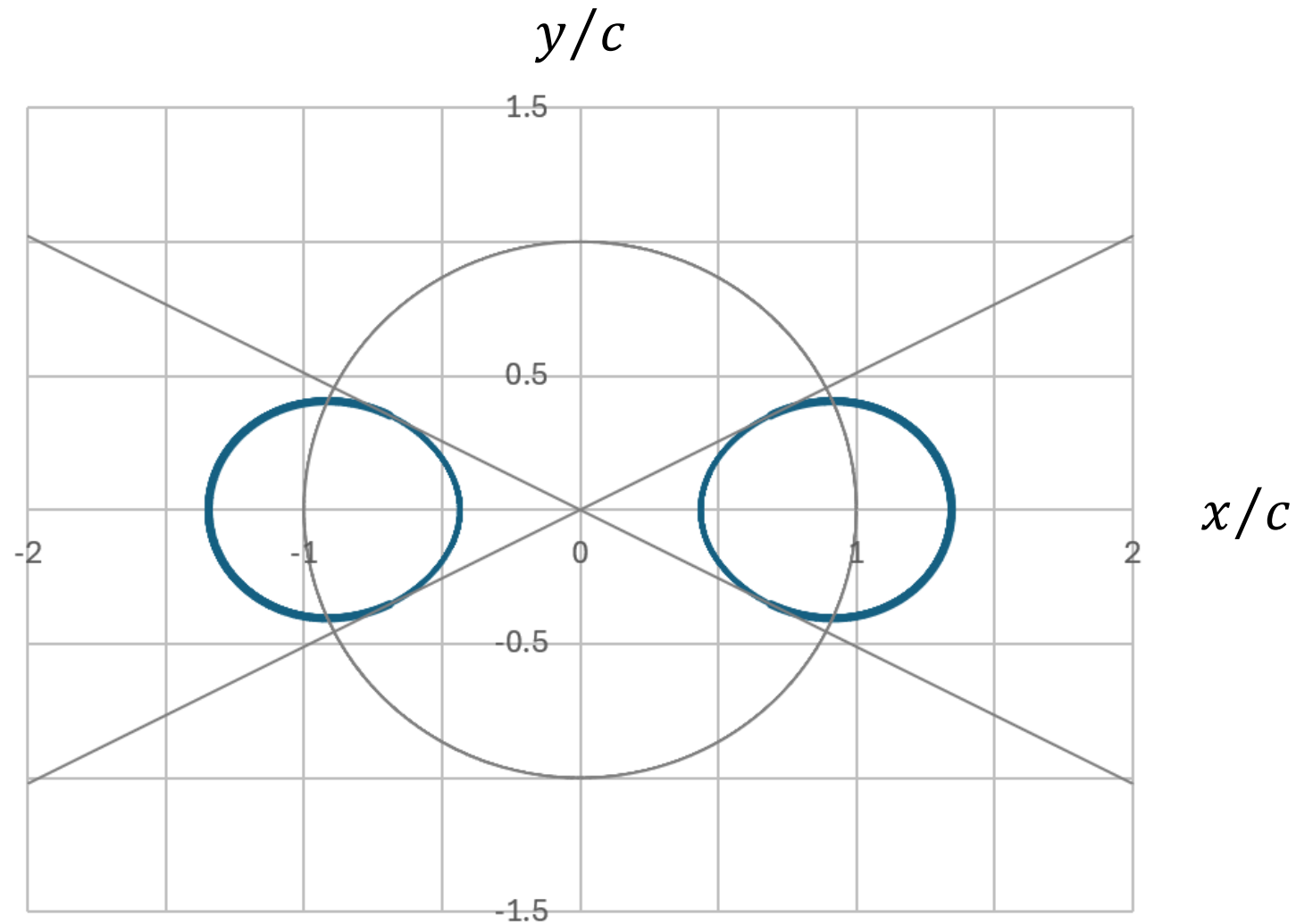
$k < c$ のとき、 y 軸に関して線対称な2つの単一閉曲線(自分自身と交点をもたない曲線)になる。

$k = c$ のとき、原点を中心とする ∞ 形になる。特に、これをレムニスケートという。

$k > c$ のとき、1つの単一閉曲線になる。特に $c < k < \sqrt{2}c$ のとき、 $x = 0$ でくびれた形になる。 $k \geq \sqrt{2}c$ のときは、くびれをもたない。

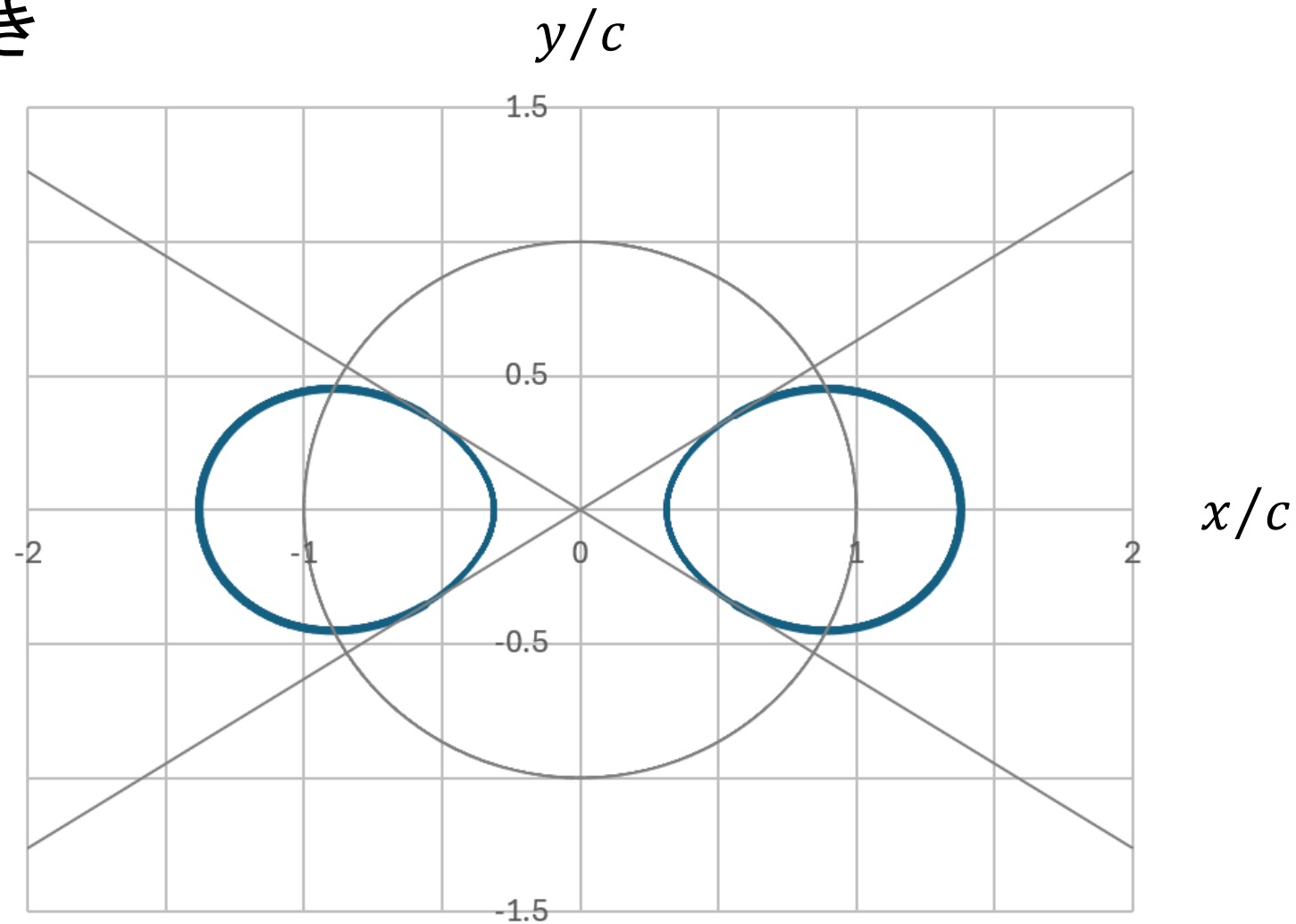
カッシーニの卵形線

$k = 0.9c$ のとき



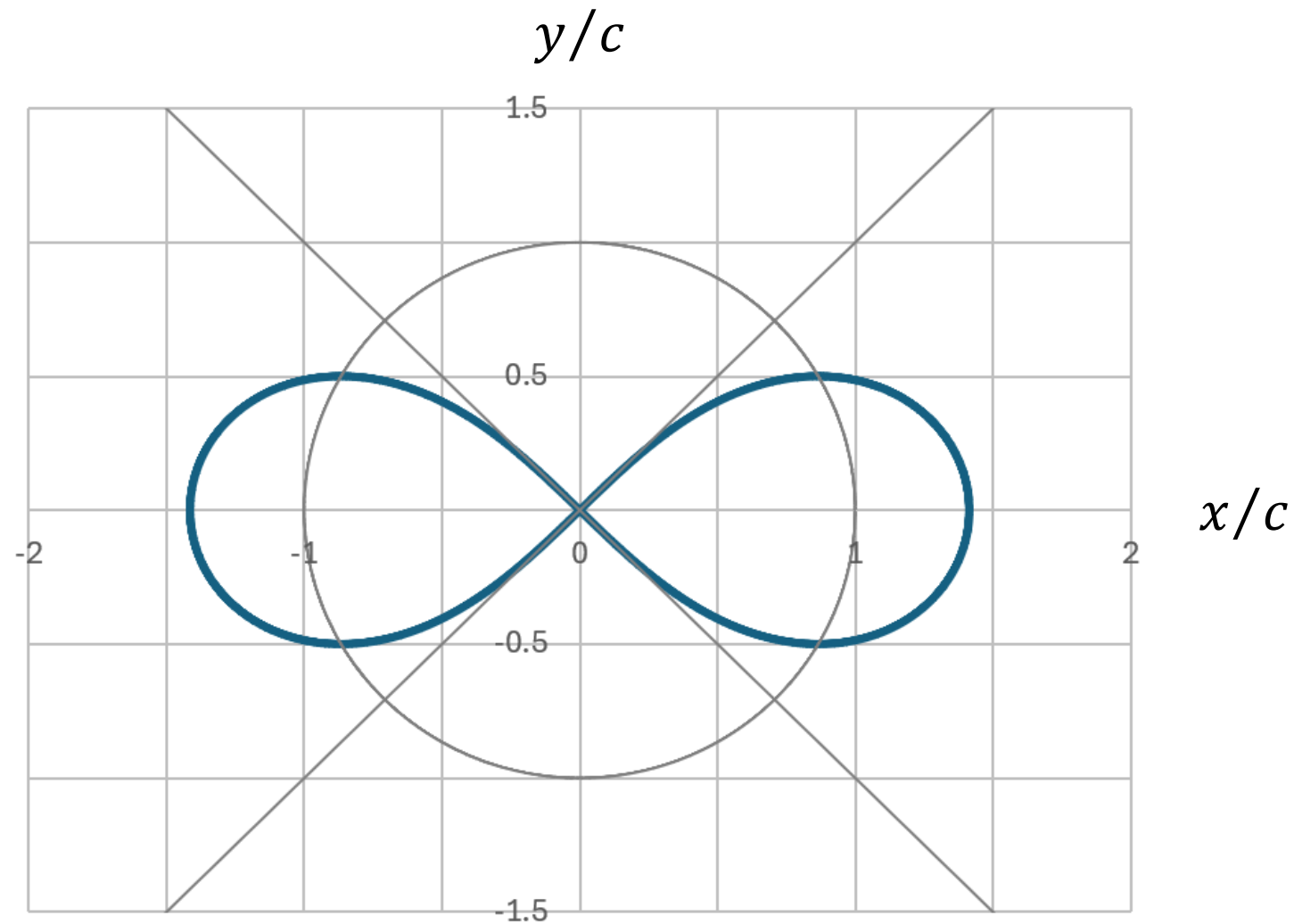
カッシーニの卵形線

$k = 0.95c$ のとき



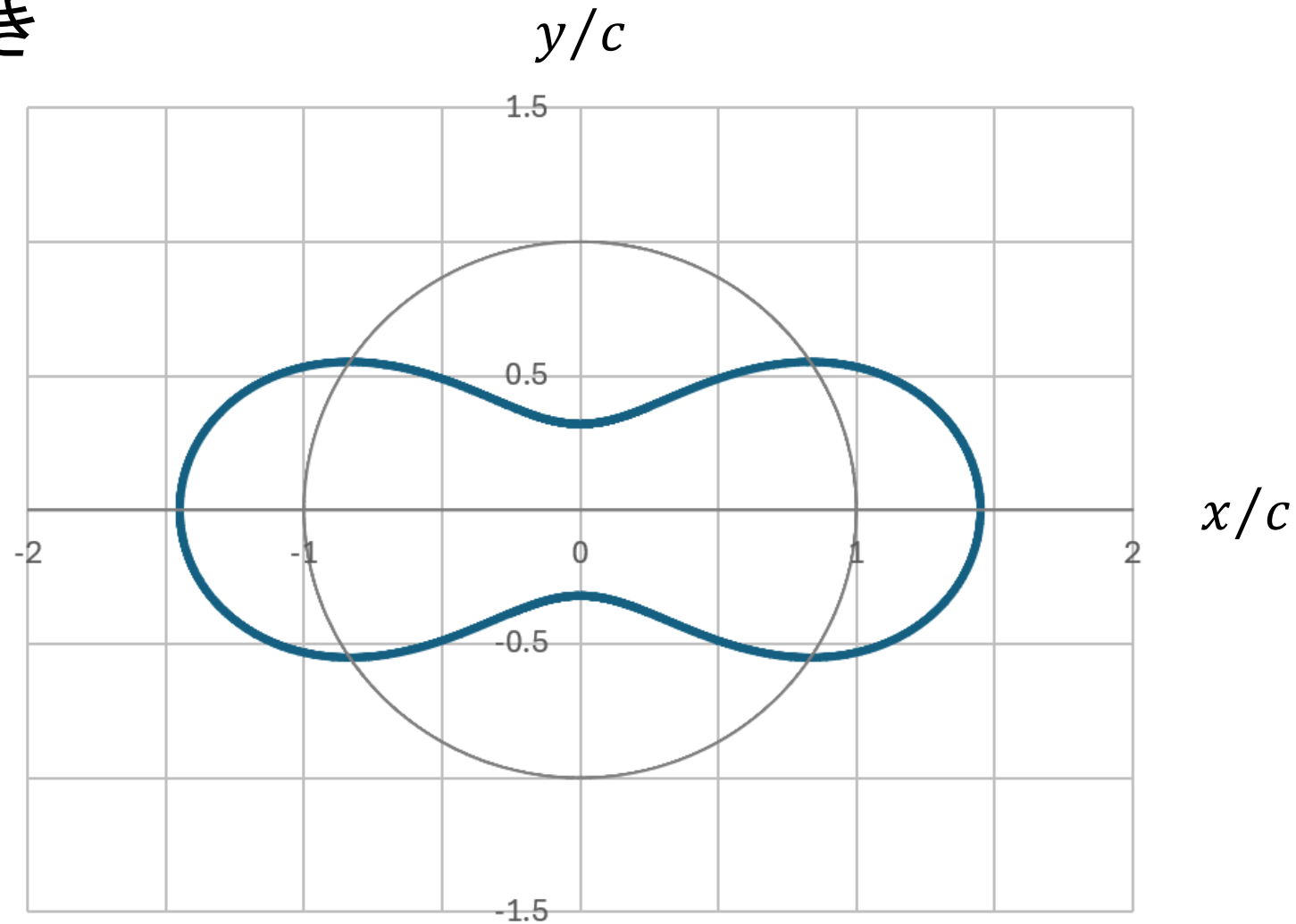
レムニスケート

$k = c$ のとき



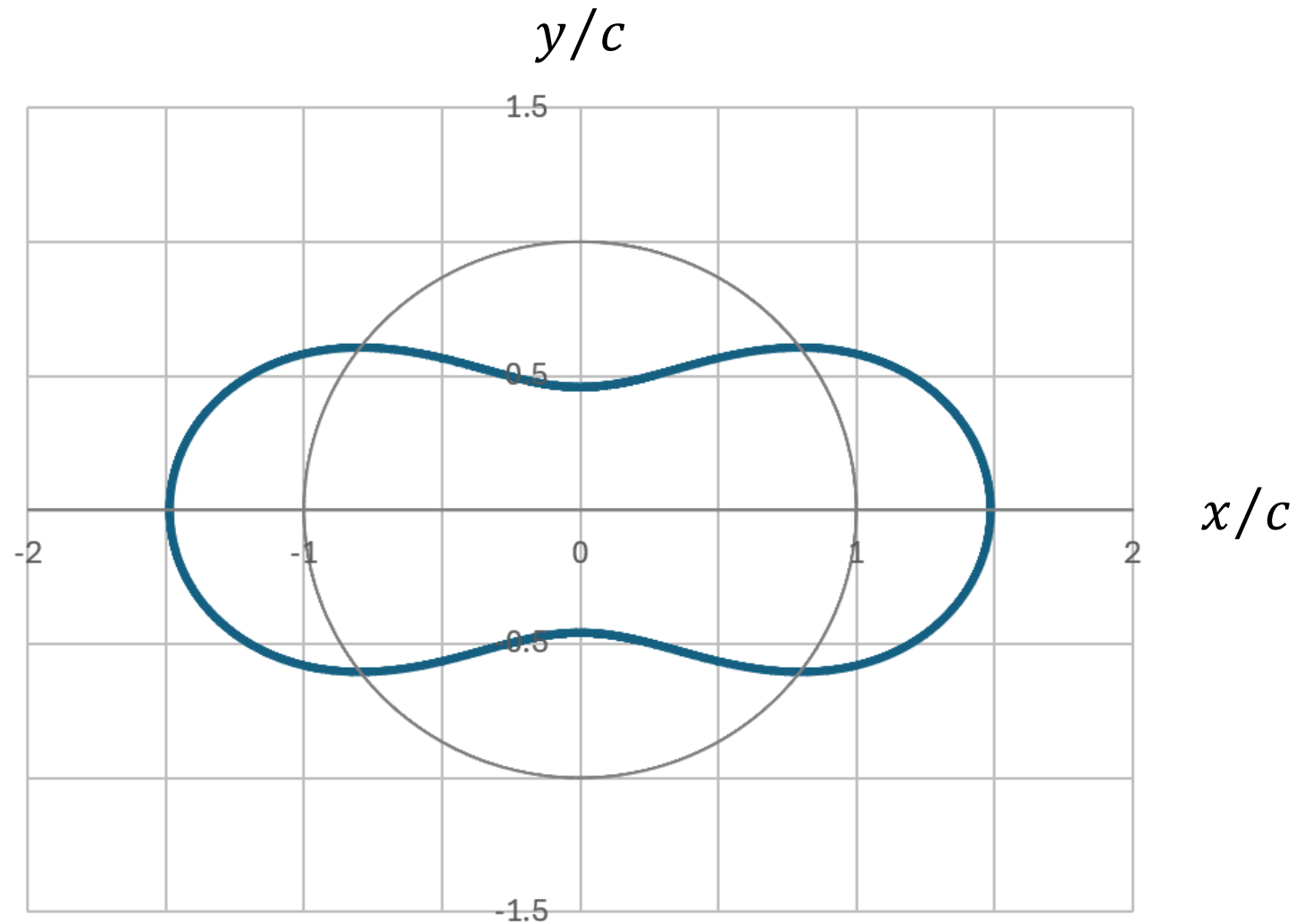
カッシーニの卵形線

$k = 1.05c$ のとき



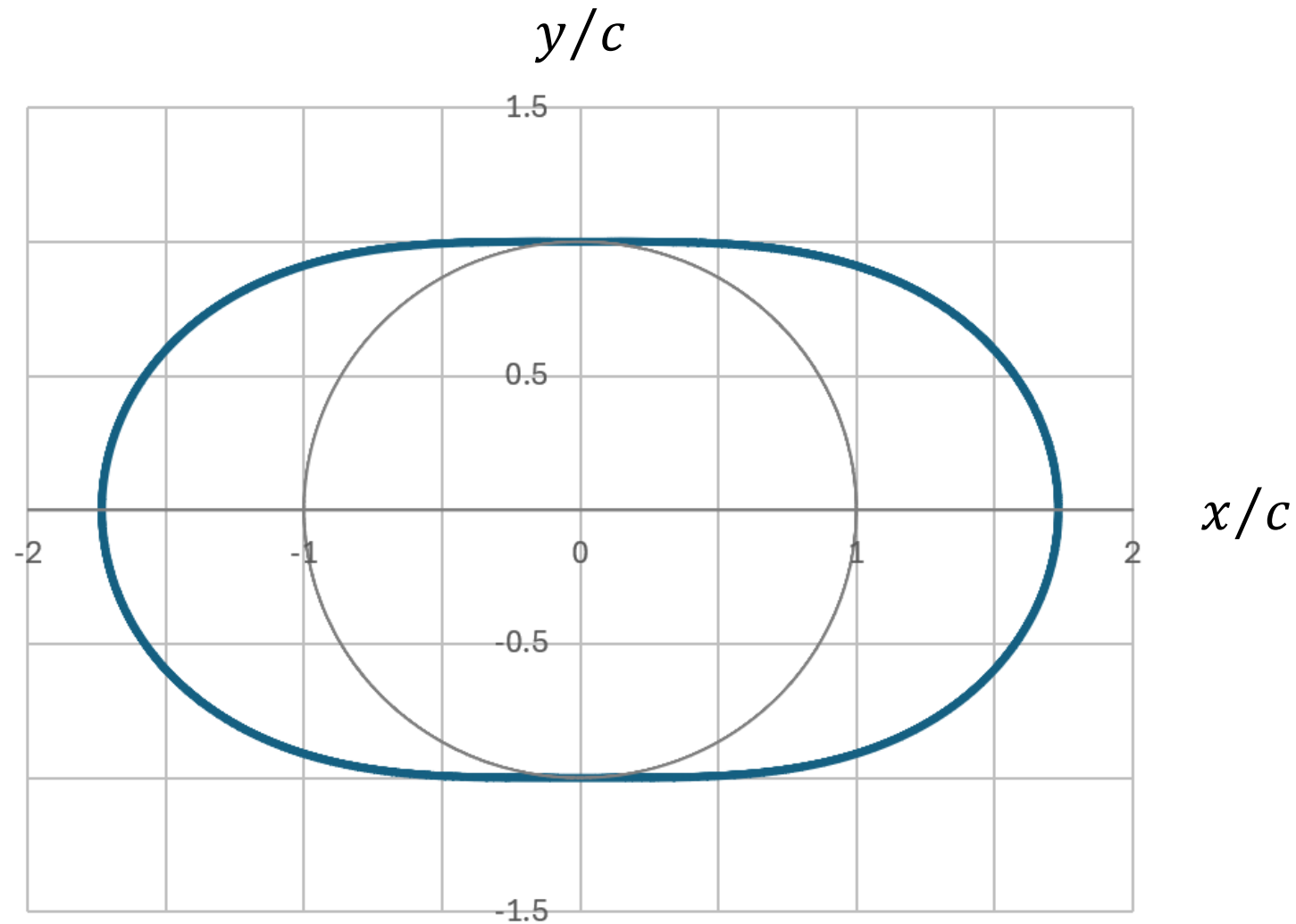
カッシーニの卵形線

$k = 1.1c$ のとき



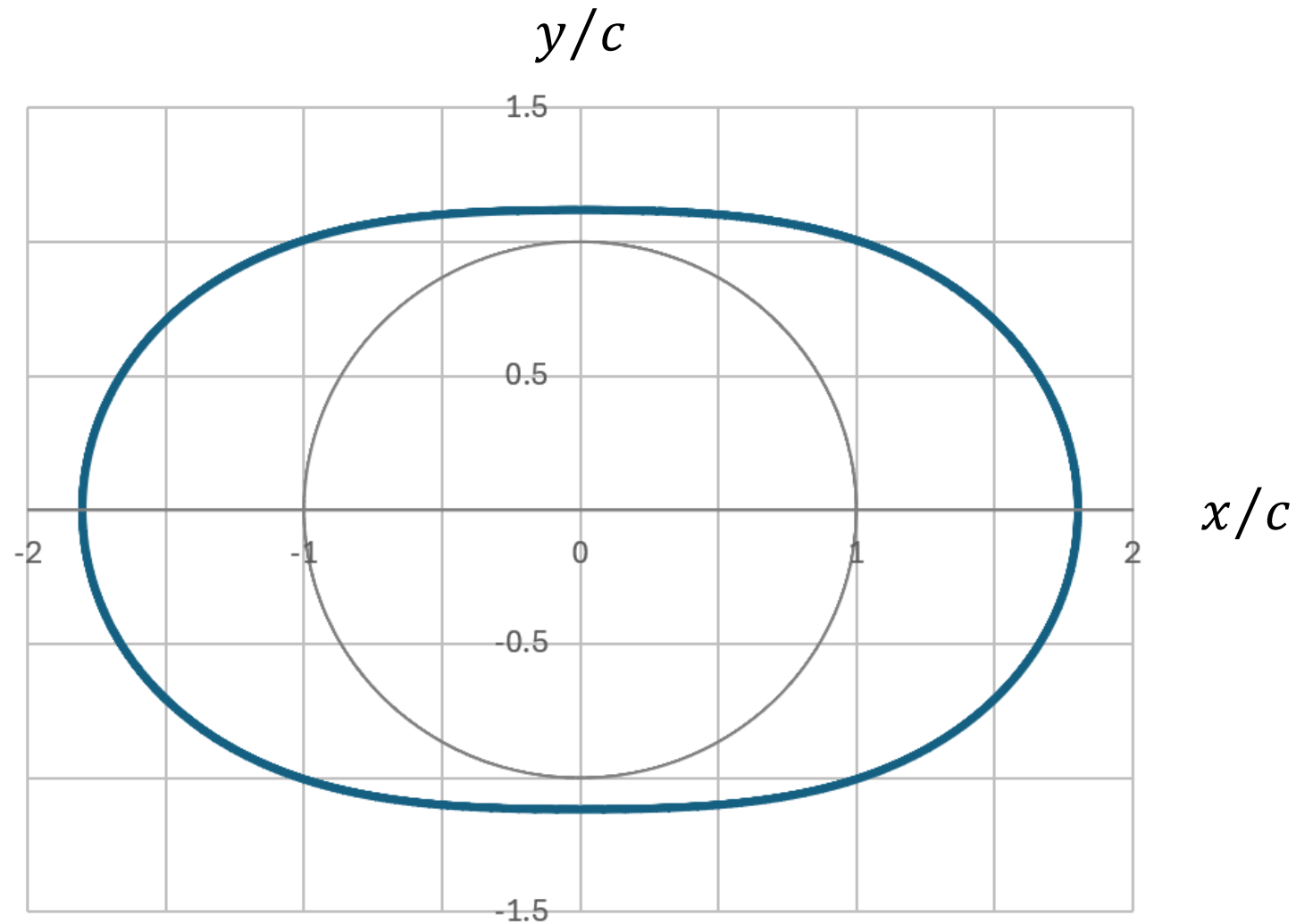
カッシーニの卵形線

$k = \sqrt{2}c$ のとき



カッシーニの卵形線

$k = 1.5c$ のとき



レムニスケート

$k = c$ のレムニスケートの方程式は、直交座標では

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

極座標では

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta = 0$$

$$\therefore r^2 = 2c^2 \cos 2\theta$$

となる。

$r^2 \geq 0$ だから、曲線が存在する θ の範囲は

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$$

である。

レムニスケート:面積

レムニスケートの面積は

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \cdot 2c^2 \cos 2\theta d\theta \\ &= 4c^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 4c^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = 4c^2 \cdot \frac{1}{2} = 2c^2 \end{aligned}$$

である。したがって、片側のループの面積は、1辺が c の正方形の面積に等しい。

レムニスケート: 周長

レムニスケートの周長は、 $r^2 = 2c^2 \cos 2\theta$ より

$$2r \frac{dr}{d\theta} = -4c^2 \sin 2\theta$$

だから

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\left(\frac{-2c^2 \sin 2\theta}{r}\right)^2 + r^2} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{4c^4 \sin^2 2\theta}{r^2} + r^2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{4c^4 \sin^2 2\theta + r^4}{r^2}} d\theta \end{aligned}$$

レムニスケート: 周長

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{4c^4 \sin^2 2\theta + (2c^2 \cos 2\theta)^2}{2c^2 \cos 2\theta}} d\theta = 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

ここで、 $\cos^2 \varphi = \cos 2\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} -2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi &= -2 \sin 2\theta d\theta = -2\sqrt{1 - \cos^2 2\theta} d\theta \\ &= -2\sqrt{1 - \cos^4 \varphi} d\theta \end{aligned}$$

より、周長は

$$L = 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^4 \varphi}} = 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^4 \varphi}}$$

レムニスケート: 周長

$$\begin{aligned} &= 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \, d\varphi}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)(1 + \cos^2 \varphi)}} \\ &= 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + (1 - \sin^2 \varphi)}} \\ &= 4\sqrt{2}c \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 - \sin^2 \varphi}} = 4c \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \\ &= 4c \cdot K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4c \cdot 1.85407 \end{aligned}$$

ここで、 $K(k)$ は第1種完全楕円積分である。

まとめ

2点からの距離の積が等しい点の集合が描く曲線を、カッシーニの卵形線という。その曲線の方程式は、直交座標で

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - k^4 = 0$$

極座標で

$$(r^2 - c^2 \cos 2\theta)^2 + c^4 \sin^2 2\theta - k^4 = 0$$

と表される。この曲線は、 c と k の大小関係によって3つに分類される。特に、 $k = c$ の場合の曲線をレムニスケートという。

参考文献

- 戸田 盛和「楕円関数入門」日本評論社、2001
- 高瀬 正仁「dxとdyの解析学－オイラーに学ぶ」増補版、日本評論社、2015