

冪関数と指数関数

—その大小関係—

渡邊 俊夫

x の a 乗: 冪関数

a を正の定数として、 $x \geq 0$ において x の冪関数

$$f(x) = x^a$$

を考えると、 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ である。また、

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

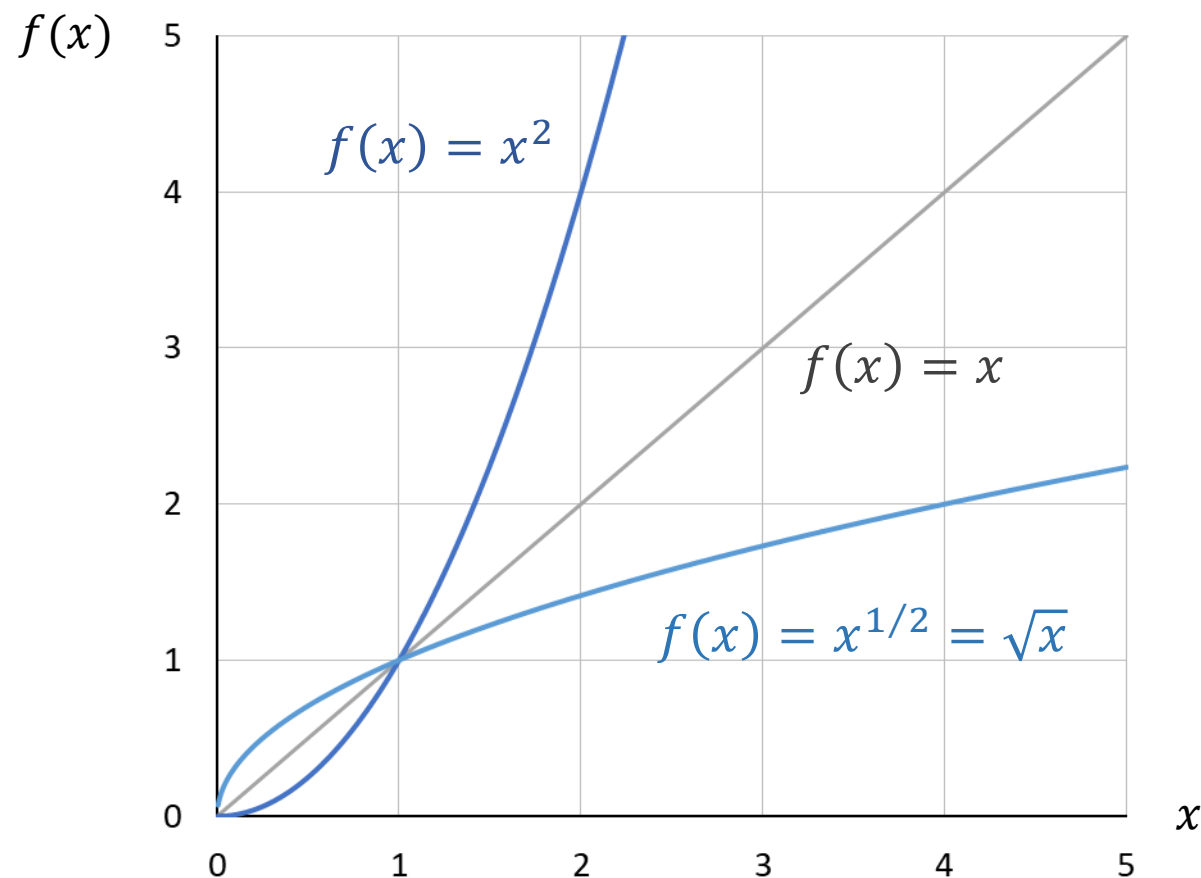
$$f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

より、 $f(x)$ は増加関数であり、

$a > 1$ のとき下に凸の曲線

$a = 1$ のとき直線 $f(x) = x$

$a < 1$ のとき上に凸の曲線である。



a の x 乗: 指数関数

a を正の定数として、 $x \geq 0$ において指数関数

$$f(x) = a^x = e^{x \log a}$$

を考えると、 $f(0) = 1$, $f(1) = a$ である。また、

$$f'(x) = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x$$

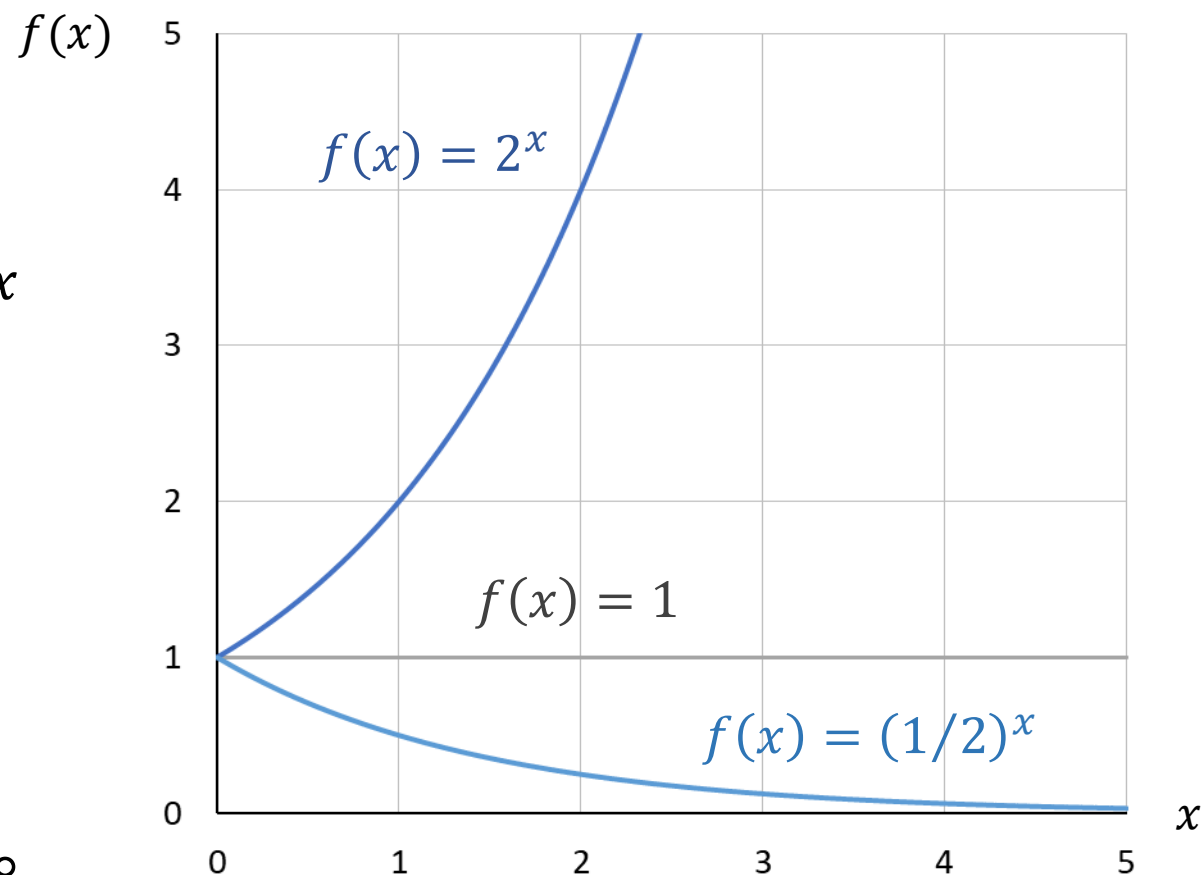
$$f''(x) = (\log a)^2 \cdot a^x$$

より、 $f(x)$ は $a \neq 1$ のとき下に凸で、

$a > 1$ のとき増加関数、

$a < 1$ のとき減少関数であり、

$a = 1$ のときは直線 $f(x) = 1$ である。



冪関数と指数関数：大小関係

$a > 1$ のとき、 $x \geq 0$ において冪関数 x^a と指数関数 a^x はいずれも下に凸の増加関数であるが、その大小関係を考える。

$$x = 0 \text{ で、} 0^a = 0, a^0 = 1 \text{ より、} x^a < a^x$$

$$x = 1 \text{ で、} 1^a = 1, a^1 = a \text{ より、} x^a < a^x$$

$$x \rightarrow \infty \text{ で、} x^a < a^x$$

であるが、

$$x = a \text{ で、} x^a = a^x$$

である。

冪関数と指数関数：交点

$a > 1$ のとき、 $x \geq 0$ において $x^a = a^x$ となるのは

$$a \log x = x \log a \quad \therefore \frac{\log a}{a} x = \log x$$

より、直線 $y = (\log a/a)x$ と $y = \log x$ の交点である。

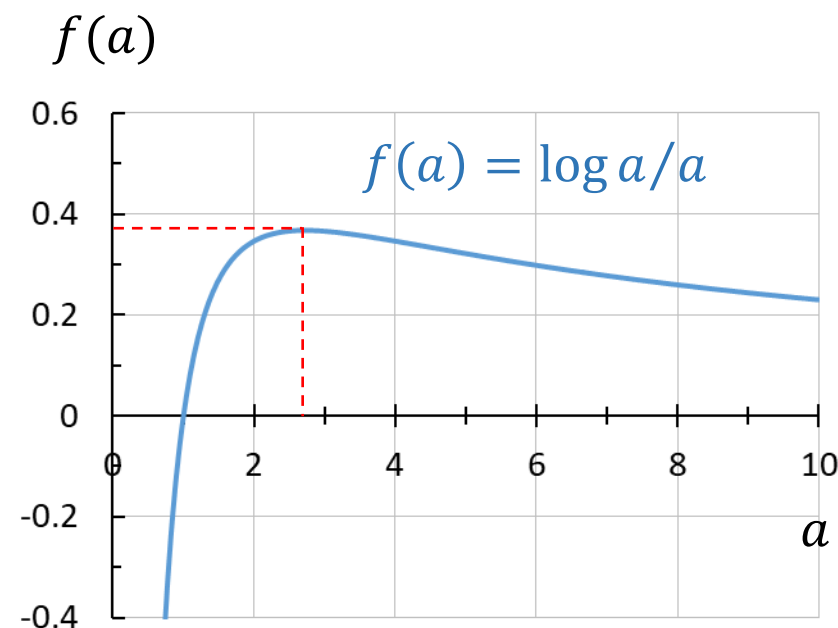
ここで、直線の傾き $\log a/a$ は

$$\left(\frac{\log a}{a}\right)' = \frac{\frac{1}{a} \cdot a - \log a \cdot 1}{a^2} = \frac{1 - \log a}{a^2}$$

より、 $\log a = 1$ すなわち $a = e$ で

最大値 $\log a/a = 1/e$ をとる。

($\log a/a$ は $1/e$ より大きくなることはない。)



冪関数と指数関数：交点

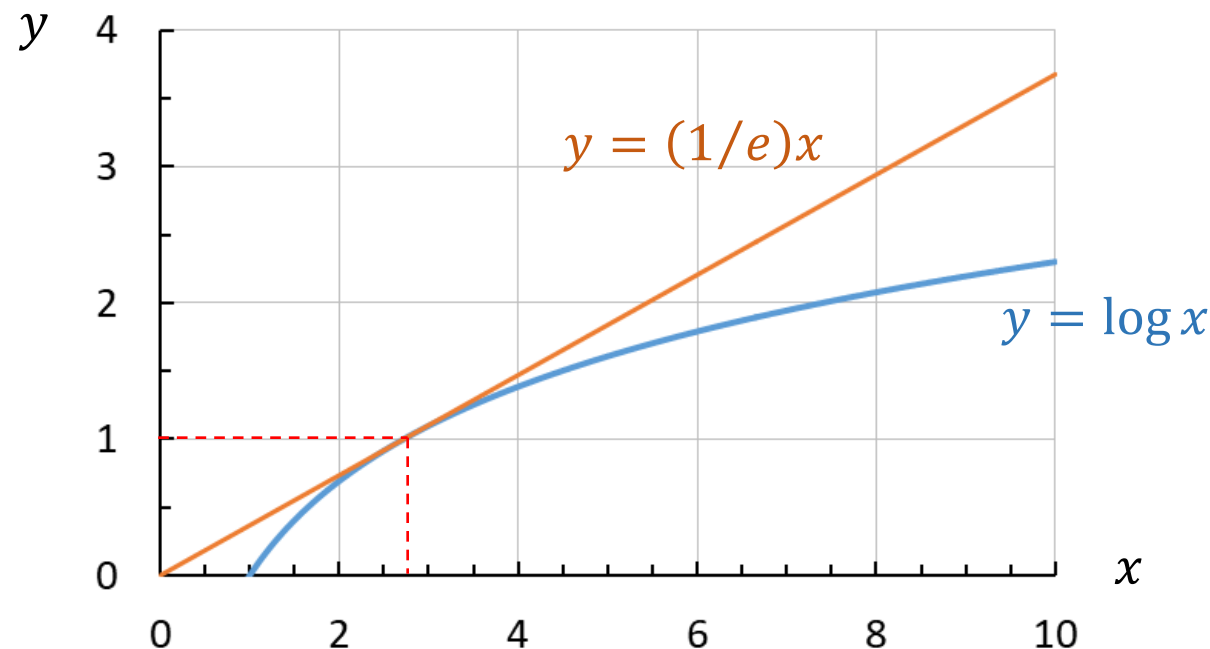
$a > 1$ のとき、 $x \geq 0$ において $x^a = a^x$ となるのは、直線 $y = (\log a/a)x$ と $y = \log x$ の交点である。

ここで、直線の傾き $\log a/a$ は $a = e$ で最大値 $1/e$ をとる。

$a = e$ のとき、直線 $y = (\log a/a)x = (1/e)x$ と $y = \log x$ の交点は $(x, y) = (e, 1)$ であるが、

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

であるから、直線 $y = (1/e)x$ はこの点における $y = \log x$ の接線になっている。



冪関数と指数関数：交点

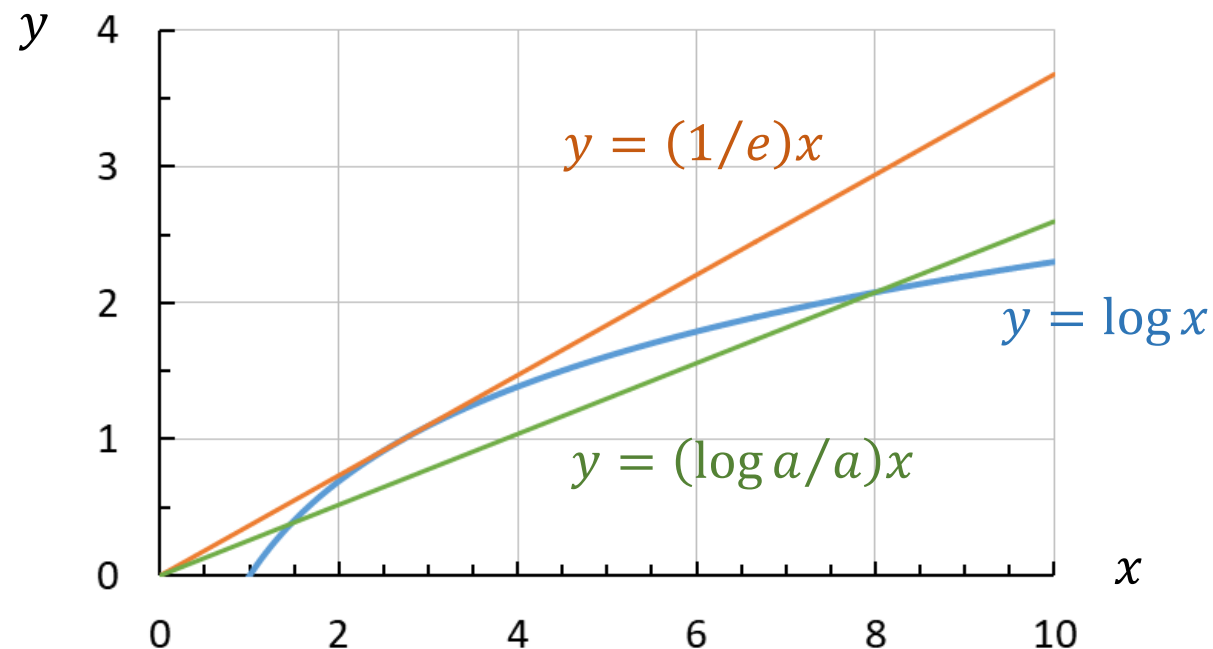
$a > 1$ のとき、 $x \geq 0$ において $x^a = a^x$ となるのは、直線 $y = (\log a/a)x$ と $y = \log x$ の交点である。

ここで、直線の傾き $\log a/a$ は $a = e$ で最大値 $1/e$ をとる。

$a = e$ のとき、直線 $y = (1/e)x$ は点 $(e, 1)$ における $y = \log x$ の接線になっている。

したがって、 $x \geq 0$ で $x^a = a^x$ は $a = e$ の場合、重解 $x = a = e$ をもつ。

$a \neq e$ の場合、2つの異なる解をもち、その一方は $x = a$ である。



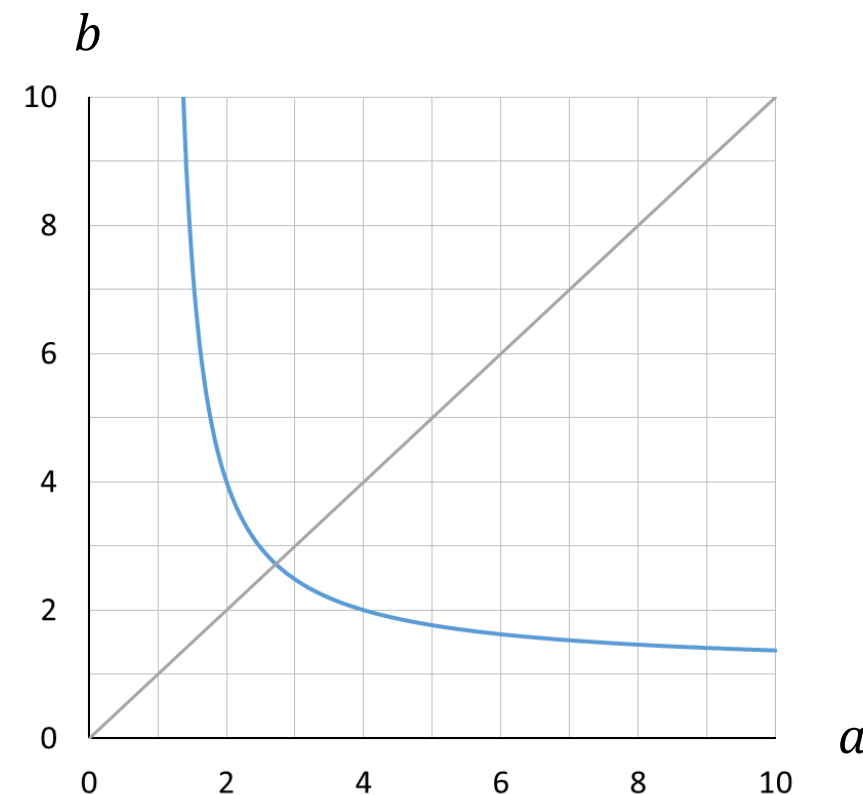
冪関数と指数関数：交点

$a > 1$ のとき、 $x \geq 0$ における $x^a = a^x$ の2つの解を $x = a, x = b$ とする。

特に、 $2^4 = 4^2 = 16$ だから、 $b(2) = 4$,
 $b(4) = 2$ である。

それ以外の $b(a)$ を数値的に求めて
図示すると、右図のようになる。

$b = b(a)$ のグラフは 点 $(2,4), (e,e), (4,2)$
を通り、直線 $b = a$ に対して対称である。
 $a = 1$ と $b = 1$ を漸近線とする双曲線に
近いが、厳密には双曲線ではない。



冪関数と指数関数：大小関係

$a > 1$ のとき、 $x \geq 0$ における冪関数 x^a と指数関数 a^x の大小関係は

$1 < a < e$ の場合、 $a < x < b$ で $x^a > a^x$ 、それ以外で $x^a < a^x$

$a = e$ の場合、 $x = e$ で $x^a = a^x$ 、それ以外で $x^a < a^x$

$a > e$ の場合、 $b < x < a$ で $x^a > a^x$ 、それ以外で $x^a < a^x$

