偽陽性
ー検査結果の信頼度ー

渡邉 俊夫

病気の検査

総数 N 人の集団において、有病率 r の病気（すなわち、rN 人がかかっている病気）にかかっているかどうかを全員検査する場合を考える。ここで、

- **感度** p：病気の人を正しく陽性と判定する確率（陽性検査の確度）
- **特異度** q：病気でない人を正しく陰性と判定する確率（陰性検査の確度）

とすると、実際に病気の rN 人のうち prN 人が正しく陽性と判定されるが、実際には病気でない $(1-r)N$ 人のうち $(1-q)(1-r)N$ 人が誤って陽性と判定される（後者を**偽陽性**という）。したがって、陽性と判定された人のうち真に陽性である人の割合（陽性結果の信頼度）c_+ は

$$c_+ = \frac{prN}{prN + (1-q)(1-r)N} = \frac{pr}{pr + (1-q)(1-r)}$$

$$= \frac{pr}{(1-q) - (1-p-q)r}$$

となる。

陰性結果の信頼度

いっぽう、実際には病気の rN 人のうち $(1-p)rN$ 人が誤って陰性と判定され（これを偽陰性という）、実際に病気でない $(1-r)N$ 人のうち $q(1-r)N$ 人が正しく陰性と判定される。したがって、陰性と判定された人のうち真に陰性である人の割合（陰性結果の信頼度）c_- は

$$c_- = \frac{q(1-r)N}{(1-p)rN + q(1-r)N} = \frac{q(1-r)}{(1-p)r + q(1-r)}$$

$$= \frac{q(1-r)}{q + (1-p-q)r}$$

となる。これは、陽性結果の信頼度 c_+ の表式中の r を $1-r$ に、p を q に、q を p に置き換えた式に相当する。

陽性結果と陰性結果の内訳

陽性結果と陰性結果の人数と信頼度は、下の表のようになる。

		割合	人数	検査の確度	検査結果	
					陽性	陰性
実際	陽性	r	rN	p	prN	$(1-p)rN$
	陰性	$1-r$	$(1-r)N$	q	$(1-q)(1-r)N$	$q(1-r)N$
	合計		N		$prN+(1-q)(1-r)N$	$(1-p)rN+q(1-r)N$
	信頼度				$\dfrac{pr}{(1-q)-(1-p-q)r}$	$\dfrac{q(1-r)}{q+(1-p-q)r}$

- 感度 p：病気の人を正しく陽性と判定する確率（陽性検査の確度）
- 特異度 q：病気でない人を正しく陰性と判定する確率（陰性検査の確度）
- 偽陽性：実際には病気でない人が誤って陽性と判定されること
- 偽陰性：実際には病気の人が誤って陰性と判定されること

陽性結果の信頼度

陽性と判定された人のうち真に陽性である人の割合（陽性結果の信頼度）c_+ は

$$c_+ = \frac{pr}{(1-q)-(1-p-q)r}$$

である。これより、$r=0$ のとき $c_+=0$、$r=1$ のとき $c_+=1$ であり、$r=0.5$ のとき

$$c_+ = \frac{0.5p}{(1-q)-0.5(1-p-q)} = \frac{0.5p}{0.5(1+p-q)} = \frac{p}{1+p-q}$$

となる。また、

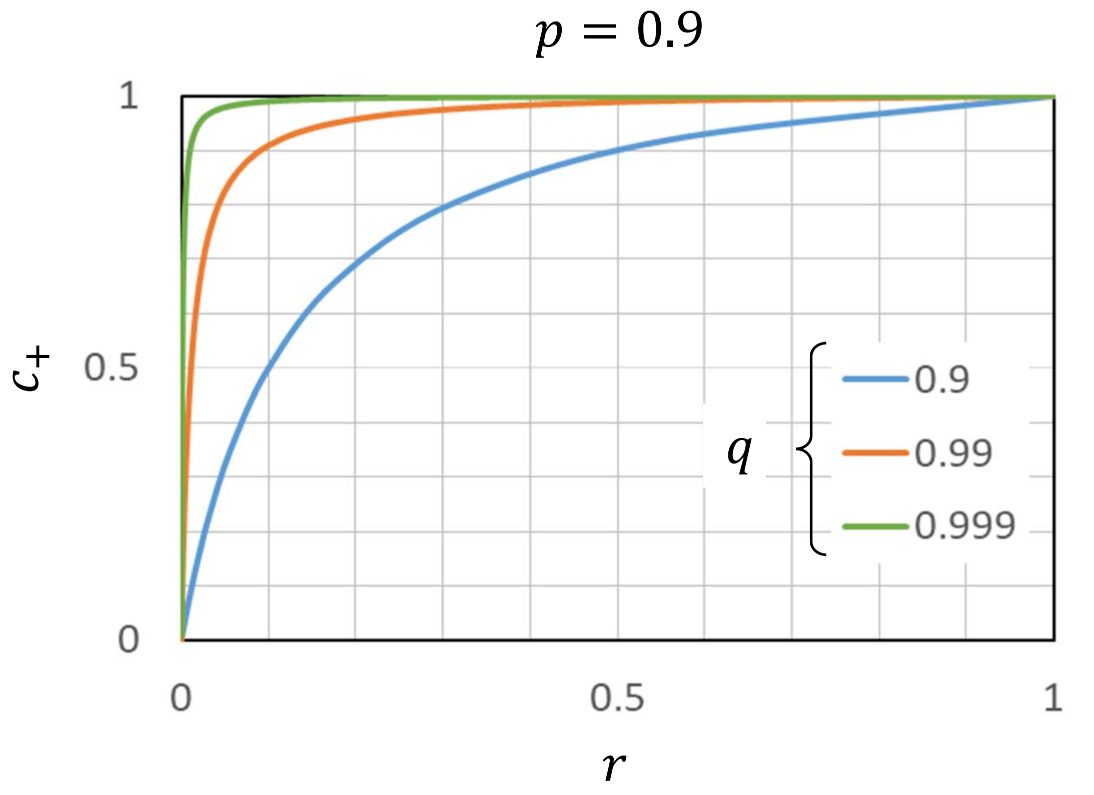
$$\frac{dc_+}{dr} = \frac{p\big((1-q)-(1-p-q)r\big)+pr(1-p-q)}{\big((1-q)-(1-p-q)r\big)^2}$$

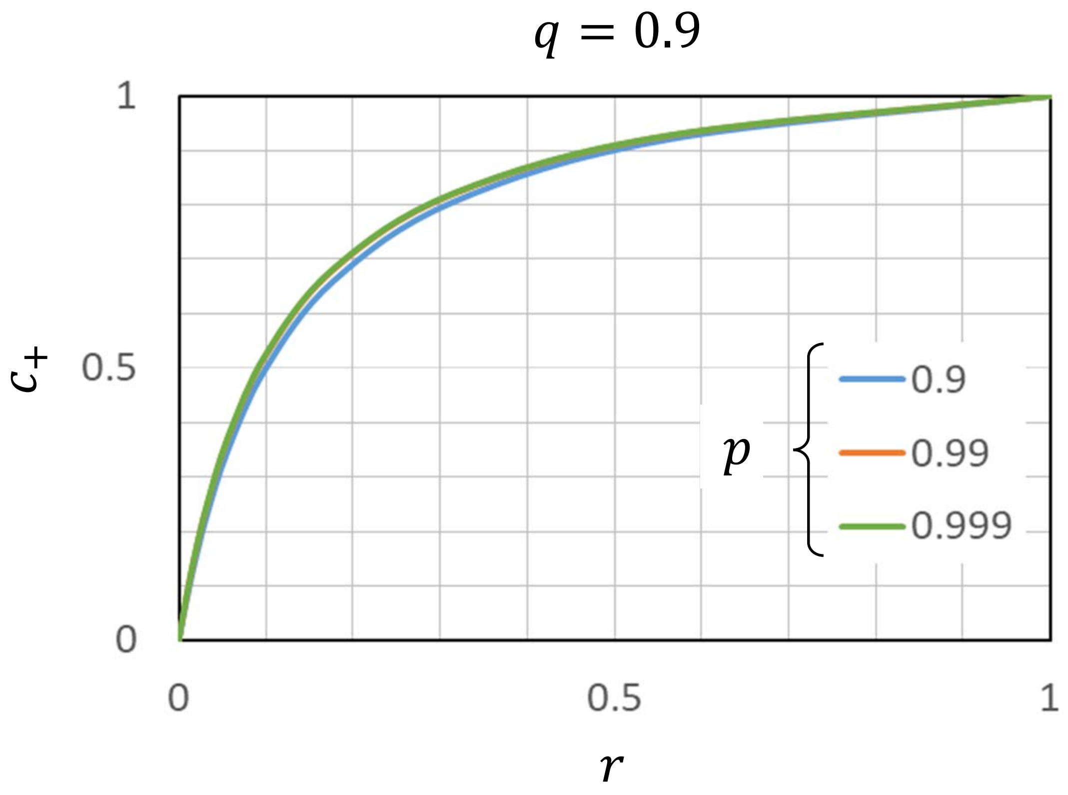
$$= \frac{p(1-q)}{\big((1-q)-(1-p-q)r\big)^2} \geq 0$$

より c_+ は r についての増加関数である。

陽性結果の信頼度

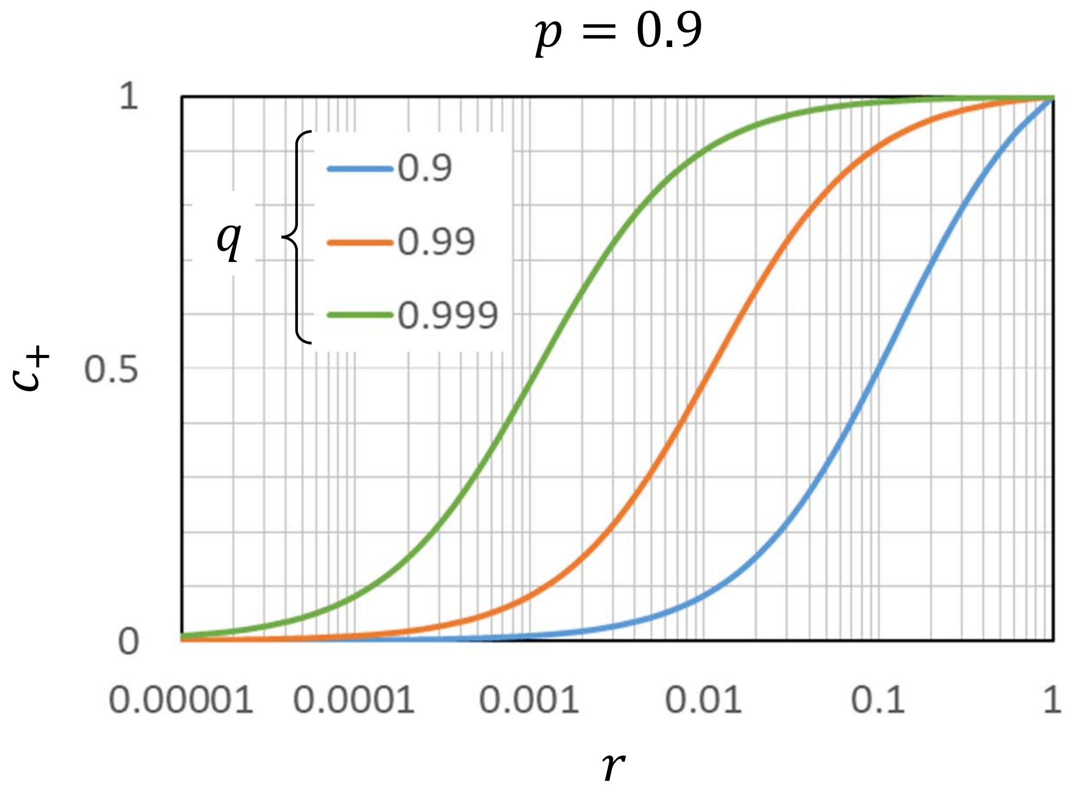
陽性結果の信頼度 c_+ は、$r = 0$ のとき $c_+ = 0$、$r = 1$ のとき $c_+ = 1$ であり、r についての増加関数である。c_+ は、感度 p が同じとき特異度 q によって大きく変わるが、特異度 q が同じとき感度 p によらずほとんど変わらない。

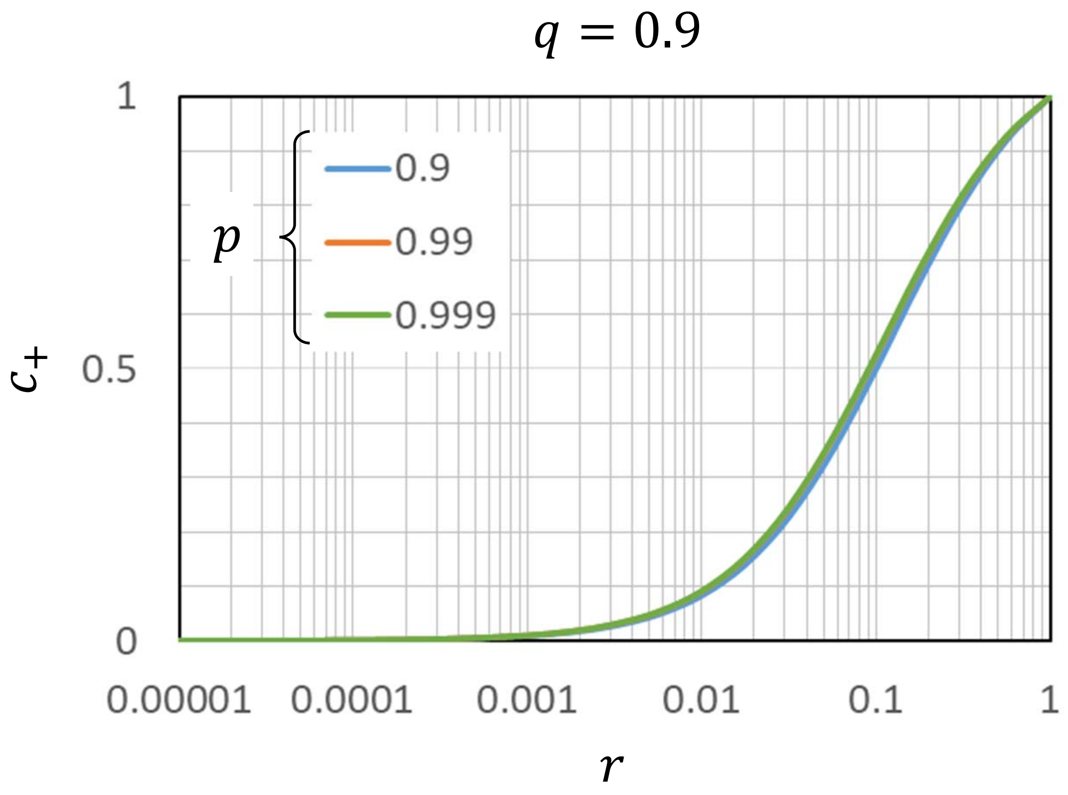




陽性結果の信頼度

横軸を対数で表示すると下図のようになる。有病率 r が低い場合には、それに応じて特異度 q を 1 に近づけないと、陽性結果の信頼度 c_+ が感度 p に比べてかなり低くなってしまう。





陽性結果の信頼度:有病率が低い場合

陽性結果の信頼度は、$r \ll 1$ のとき、以下のように近似される。

$$c_+ = \frac{pr}{pr + (1-q)(1-r)} \cong \frac{pr}{pr + 1 - q}$$

これは、$1 - q \ll pr$ のとき

$$c_+ \cong \frac{pr}{pr} = 1$$

であるが、$1 - q \gg pr$ のとき

$$c_+ \cong \frac{pr}{1-q} \ll 1$$

となる。すなわち、有病率 r が低い場合には、$1 - q \ll pr$ が成り立つように特異度 q を 1 に近づけないと、陽性結果の信頼度 c_+ が感度 p に比べてかなり低くなってしまう。

陰性結果の信頼度

陰性と判定された人のうち真に陰性である人の割合（陰性結果の信頼度）c_- は

$$c_- = \frac{q(1-r)}{q+(1-p-q)r}$$

である。これより、$r=0$ のとき $c_- = 1$、$r=1$ のとき $c_- = 0$ であり、$r=0.5$ のとき

$$c_- = \frac{0.5q}{q+0.5(1-p-q)} = \frac{0.5q}{0.5(1-p+q)} = \frac{q}{1-p+q}$$

となる。また、

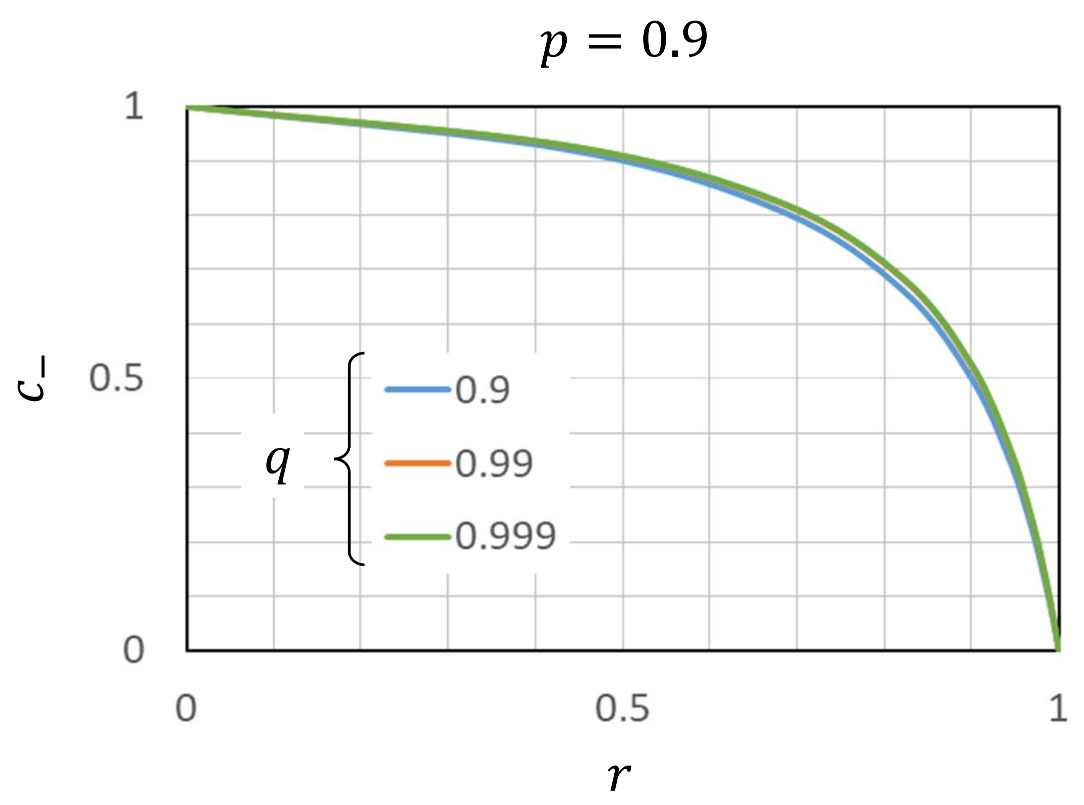
$$\frac{dc_-}{dr} = \frac{-q(q+(1-p-q)r) - q(1-r)(1-p-q)}{(q+(1-p-q)r)^2}$$

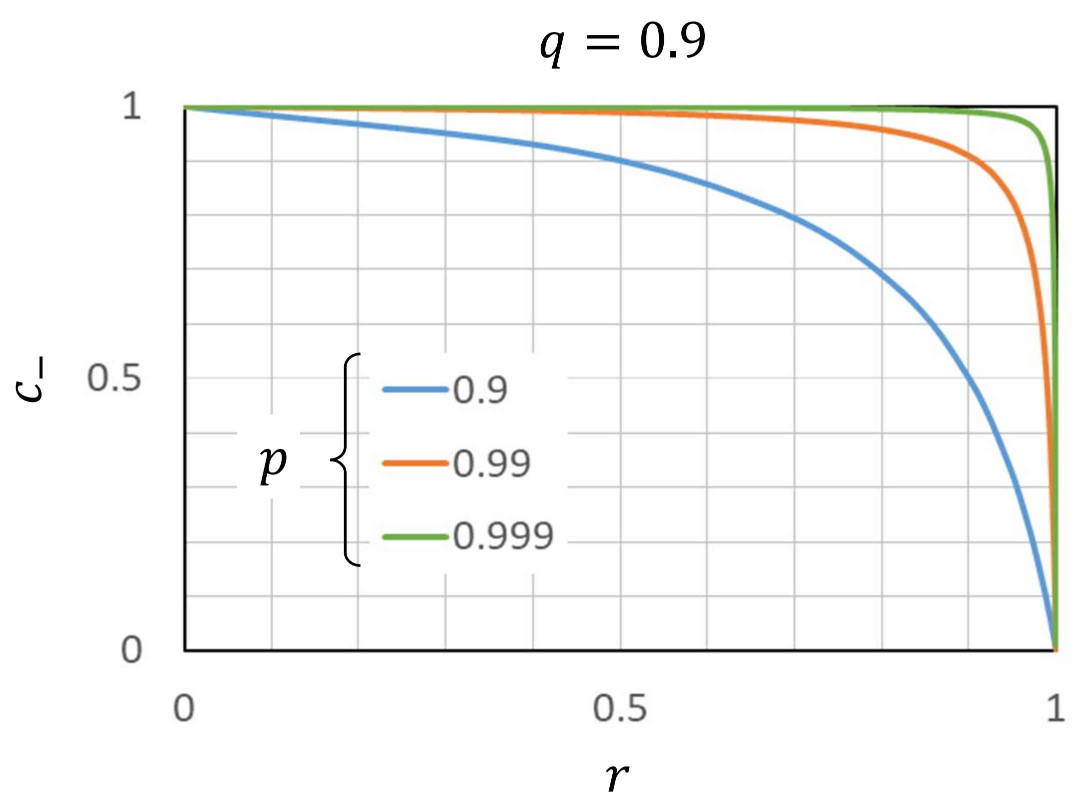
$$= \frac{-q^2 - q(1-p-q)}{(q+(1-p-q)r)^2} = \frac{-q(1-p)}{(q+(1-p-q)r)^2} \leq 0$$

より c_- は r についての減少関数である。

陰性結果の信頼度

陰性結果の信頼度 c_- は、$r = 0$ のとき $c_- = 1$、$r = 1$ のとき $c_- = 0$ であり、r についての減少関数である。c_- は、感度 p が同じとき特異度 q によらずほとんど変わらないが、特異度 q が同じとき感度 p によって大きく変わる。





陰性結果の信頼度:有病率が低い場合

陰性結果の信頼度は、$r \ll 1$ のとき、以下のように近似される。

$$c_- = \frac{q(1-r)}{(1-p)r + q(1-r)} \cong \frac{q}{(1-p)r + q}$$

これは、有病率 r が低い場合には、陰性結果の信頼度 c_- は

$$c_- \cong \frac{q}{q} = 1$$

となり、むしろ特異度 q より高くなりうることを示している。

具体例1(a)

1,000,000人のうち1,000人が病気にかかっていて、全員検査する場合を考える。

この場合、有病率は $r = 0.1\ \%$ であり、検査の確度が $p = q = 90\ \%$ だとすると、実際に病気で陽性と判定される人が 900人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）が 99,900人もいることになり、陽性信頼度はわずか 0.89 % である。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	0.1 %	1,000	90 %	900	100
	陰性	99.9 %	999,000	90 %	99,900	899,100
	合計		1,000,000		100,800	899,200
	信頼度				0.89 %	99.99 %

具体例1(b)

有病率が $r = 0.1$ % の場合、検査の確度が $p = q = 99$ % であっても、実際に病気で陽性と判定される人が 990人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）が 9,990人もいることになり、陽性信頼度は 9.02 % である。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	0.1 %	1,000	99 %	990	10
	陰性	99.9 %	999,000	99 %	9,990	989,010
	合計		1,000,000		10,980	989,020
	信頼度				9.02 %	100.00 %

具体例1(c)

有病率が $r = 0.1$ % の場合、検査の確度が $p = q = 99.9$ % であっても、実際に病気で陽性と判定される人が 999人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）が 999人いることになり、陽性信頼度は 50 % である。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	0.1 %	1,000	99.9 %	999	1
	陰性	99.9 %	999,000	99.9 %	999	998,001
	合計		1,000,000		1,998	998,002
	信頼度				50.00 %	100.00 %

具体例1(d)

有病率が $r=0.1\ \%$ の場合、検査の確度が $p=q=99.99\ \%$ になると、実際に病気で陽性と判定される人が 1,000人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）は 100人になり、陽性信頼度は 90.92 % となる。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	0.1 %	1,000	99.99 %	1,000	0
	陰性	99.9 %	999,000	99.99 %	100	998,900
	合計		1,000,000		1,100	998,900
	信頼度				90.92 %	100.00 %

具体例2(a)

次に、実際に病気の人は同じ 1,000人であるが、明らかに病気でない人は検査対象から除いて（これをスクリーニングという）、10,000人を検査する場合を考える。

この場合、有病率は $r = 10\ \%$ となり、検査の確度が $p = q = 90\ \%$ だとすると、実際に病気で陽性と判定される人が 900人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）が 900人いることになり、陽性信頼度は 50 % である。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	10 %	1,000	90 %	900	100
	陰性	90 %	9,000	90 %	900	8,100
	合計		10,000		1,800	8,200
	信頼度				50.00 %	98.78 %

具体例2(b)

有病率が $r = 10\%$ の場合、検査の確度が $p = q = 99\ \%$ であれば、実際に病気で陽性と判定される人が 990人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）は 90人になり、陽性信頼度は 91.67 % となる。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	10 %	1,000	99 %	990	10
	陰性	90 %	9,000	99 %	90	8,910
	合計		10,000		1,080	8,920
	信頼度				91.67 %	99.89 %

具体例2(c)

有病率が $r = 10\ \%$ の場合、検査の確度が $p = q = 99.9\ \%$ になると、実際に病気で陽性と判定される人が 999人なのに対して、実際には病気でないのに陽性と判定される人（偽陽性の人）は 9人になり、陽性信頼度は 99.11 % になる。

		割合	人数	検査の確度	検査結果（人）	
					陽性	陰性
実際	陽性	10 %	1,000	99.9 %	999	1
	陰性	90 %	9,000	99.9 %	9	8,991
	合計		10,000		1,008	8,992
	信頼度				99.11 %	99.99 %

まとめ

- 病気の検査において、病気の人を正しく陽性と判定する確率（感度）p が 100 % でない場合には検査結果に偽陰性が生じ、病気でない人を正しく陰性と判定する確率（特異度）q が 100 % でない場合には検査結果に偽陽性が生じる。
- 病気にかかっている人の割合（有病率）r が低い場合には、特異度 q を 100 % に近づけないと、偽陽性が多く生じてしまい、陽性結果の信頼度が感度 p に比べてかなり低くなってしまう。
- 陽性結果の信頼度を高めるためには、明らかに病気でない人を検査対象から除くスクリーニングが有効である 。

参考文献

・ゲルト・ギーゲレンツァー「リスク・リテラシーが身につく統計的思考法－初歩からベイズ推定まで」早川書房、2010.