（付録）除外者数 R の微分方程式の解

除外者数 R の時間変化は、$R/\rho \ll 1$ とすると

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - R - S_0 e^{-R/\rho}\right)$$

$$\approx \gamma\left(N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0}{2\rho^2}R^2\right)$$

となる。これを解くために、まず $dR/dt = 0$ の場合の解を求めると

$$N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0}{2\rho^2}R^2 = 0$$

より

$$R = \frac{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}}{\frac{S_0}{\rho^2}} = \frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) \pm \alpha\right) = R_{\pm}$$

となる。ただし、

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}$$

であり、$R_{\pm}$ の正負は

$$R_{+} = \frac{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}}{\frac{S_0}{\rho^2}} = \frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) + \alpha\right) > 0$$

$$R_{-} = \frac{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) - \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}}{\frac{S_0}{\rho^2}} = \frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) - \alpha\right) < 0$$

である。これより

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0}{2\rho^2}R^2\right)$$

$$= -\frac{S_0\gamma}{2\rho^2}(R_{+} - R)(R_{-} - R)$$

$$\therefore \frac{1}{(R_{+} - R)(R_{-} - R)}\frac{dR}{dt} = -\frac{S_0\gamma}{2\rho^2}$$

であるから

$$\frac{1}{R_+ - R_-}\left(\frac{1}{R_- - R} - \frac{1}{R_+ - R}\right)\frac{dR}{dt} = -\frac{S_0\gamma}{2\rho^2}$$

となるが、

$$R_+ - R_- = \frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) + \alpha\right) - \frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) - \alpha\right) = \frac{2\rho^2\alpha}{S_0}$$

より

$$\frac{S_0}{2\rho^2\alpha}\left(\frac{1}{R_- - R} - \frac{1}{R_+ - R}\right)\frac{dR}{dt} = -\frac{S_0\gamma}{2\rho^2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{R_- - R} - \frac{1}{R_+ - R}\right)\frac{dR}{dt} = -\alpha\gamma$$

である。これを積分すると、C を定数として

$$-\log|R_- - R| + \log|R_+ - R| = -\alpha\gamma t + C$$

$$\log|R_- - R| - \log|R_+ - R| = \alpha\gamma t - C$$

$$\log\left|\frac{R_- - R}{R_+ - R}\right| = \alpha\gamma t - C$$

であるが、$e^{-C} = A$ とおくと、$R_- < 0$ に注意して

$$\frac{R - R_-}{R_+ - R} = A\exp(\alpha\gamma t)$$

となる。ここで、$t = 0$ における初期条件を $R(0) = 0$ とすると、

$$-\frac{R_-}{R_+} = A$$

であるから

$$R_- - R = (R_+ - R)\frac{R_-}{R_+}\exp(\alpha\gamma t)$$

$$\left(\frac{R_-}{R_+}\exp(\alpha\gamma t) - 1\right)R = R_-(\exp(\alpha\gamma t) - 1)$$

$$\therefore R = R_-\frac{\exp(\alpha\gamma t) - 1}{\frac{R_-}{R_+}\exp(\alpha\gamma t) - 1} = R_+R_-\frac{\exp(\alpha\gamma t) - 1}{R_-\exp(\alpha\gamma t) - R_+}$$

$$= \frac{N - S_0}{-\frac{S_0}{2\rho^2}}\frac{\exp(\alpha\gamma t) - 1}{\frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) - \alpha\right)\exp(\alpha\gamma t) - \frac{\rho^2}{S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) + \alpha\right)}$$

$$= -2(N - S_0)\frac{\exp(\alpha\gamma t) - 1}{\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) - \alpha\right)\exp(\alpha\gamma t) - \left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) + \alpha\right)}$$

$$= -2(N-S_0)\frac{\exp(\alpha\gamma t)-1}{\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)(\exp(\alpha\gamma t)-1)-\alpha(\exp(\alpha\gamma t)+1)}$$

$$= 2(N-S_0)\frac{\exp(\alpha\gamma t)-1}{\alpha(\exp(\alpha\gamma t)+1)-\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)(\exp(\alpha\gamma t)-1)}$$

$$= 2(N-S_0)\frac{\sinh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}\right)}{\alpha\cosh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}\right)-\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)\sinh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}\right)}$$

となる。ここで、

$$\cosh\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)^2}} = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{2S_0(N-S_0)}}$$

$$\sinh\phi = \frac{\frac{S_0}{\rho}-1}{\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)^2}} = \frac{\rho\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)}{\sqrt{2S_0(N-S_0)}}$$

すなわち

$$\tanh\phi = \frac{\frac{S_0}{\rho}-1}{\alpha}$$

とおくと

$$R = 2(N-S_0)\frac{\sinh\phi\cosh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)+\cosh\phi\sinh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)}{\frac{\sqrt{2S_0(N-S_0)}}{\rho}\cosh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)}$$

$$= \frac{\rho^2}{S_0}\frac{\left(\frac{S_0}{\rho}-1\right)\cosh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)+\alpha\sinh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)}$$

$$= \frac{\rho^2}{S_0}\left(\frac{S_0}{\rho}-1+\alpha\tanh\left(\frac{\alpha\gamma t}{2}-\phi\right)\right)$$

を得る。

参考文献

・M. ブラウン「微分方程式 下　その数学と応用」（一樂重雄、河原正治、河原雅子、一樂祥子 訳）シュプリンガー・フェアラーク東京、2001