伝染（のレート）方程式

渡邉 俊夫

伝染病の感染

閉ざされた集団の中で伝染する病気を考える。

病気の潜伏期間はごく短く、すぐに感染すると仮定する。また、病気が治れば免疫を持ち、再び感染することはないものとする。

集団の総人数 N は、3つの状態の人数の合計である。

(1) 感染者数 I :病気にかかっていて、周りにうつす可能性のある者の数。

(2) 未感染者数 S :まだ病気にかかっておらず、うつされる可能性のある者の数。

(3) 除外者数 R :もう病気にかかることはない者の数(すでに病気にかかって死亡したり、回復して免疫ができたり、あるいは隔離されたりした者の数)。

このとき、$I+S+R=N$ であり、N は定数だから

$$\frac{d}{dt}(I+S+R)=0$$

である。

伝染のレート方程式

感染者数 I、未感染者数 S、除外者数 R の時間変化は、それぞれ

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

で表されるものとする。ここで、

β：伝染速度（感染者と未感染者が1人ずつのとき、単位時間に感染者が1人発生する確率）

γ：除外速度（感染者1人あたり単位時間に除外者が1人発生する確率）

である。

感染の閾値

$\dfrac{dS}{dt} < 0, \quad \dfrac{dR}{dt} > 0$ であるから、時間 t の経過とともに未感染者数 $S(t)$ は減少し、除外者数 $R(t)$ は増大していく。

いっぽう、感染者数 $I(t)$ の時間変化は

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = \left(S - \frac{\gamma}{\beta}\right)\beta I = (S - \rho)\beta SI$$

によって決まる。ここで、除外速度 γ と伝染速度 β の比 $\rho = \gamma/\beta$ を閾値という。

感染者が増えていくか減っていくかは S と ρ の大小関係による。すなわち、$S > \rho$ であれば感染者数 $I(t)$ は時間 t とともに増大し、$S < \rho$ であれば感染者数 $I(t)$ は時間 t とともに減少する。

そして、$I = 0$ になると、$\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dR}{dt} = 0$ となって、未感染者数 S と除外者数 R が一定値に達することになる。

感染者vs未感染者

感染者数 I と未感染者数 S の微分方程式は、除外者数 R を含んでおらず

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S} = -1 + \frac{\rho}{S}$$

となる。これを積分すると、C を定数として

$$I = -S + \rho \log S + C$$

となり、$t = 0$ における初期条件を $I(0) = I_0, S(0) = S_0 = N - I_0$（すなわち、$R(0) = 0$）とすれば

$$I_0 = -(N - I_0) + \rho \log S_0 + C \qquad \therefore C = N - \rho \log S_0$$

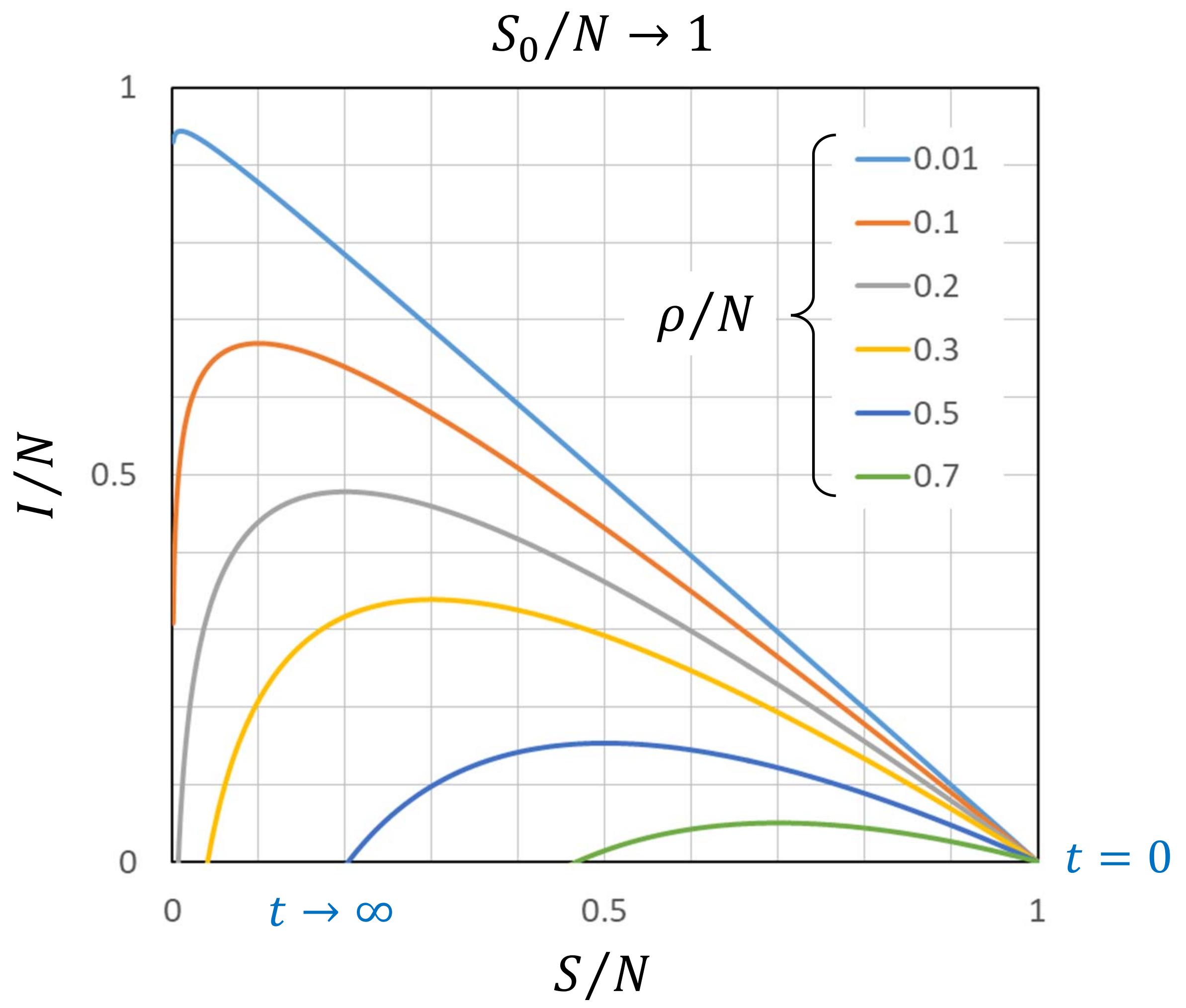
より

$$I = N - S + \rho \log \frac{S}{S_0}$$

を得る。

感染者vs未感染者

閾値 ρ が小さいほど感染は拡大する。$S = \rho$ のときに感染者数が極大となる。



除外者

除外者数 R の時間変化は

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I = \gamma(N - R - S)$$

より定まるが

$$\frac{dS}{dR} = \frac{-\beta SI}{\gamma I} = -\frac{\beta S}{\gamma} = -\frac{S}{\rho}$$

だから

$$S = S_0 e^{-R/\rho}$$

であり

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - R - S_0 e^{-R/\rho}\right)$$

となる。

除外者：近似

除外者数 R の微分方程式

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - R - S_0 e^{-R/\rho}\right)$$

の解は解析的には求められないが、$R/\rho \ll 1$ であるとして

$$e^{-R/\rho} = 1 - \frac{R}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 - \cdots$$

と展開すると

$$\frac{dR}{dt} \approx \gamma\left(N - R - S_0\left(1 - \frac{R}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho}\right)^2\right)\right) = \gamma\left(N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0}{2\rho^2}R^2\right)$$

となる。

除外者：解

$R/\rho \ll 1$ として近似した除外者数 R の微分方程式

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0}{2\rho^2}R^2\right)$$

は解析的に解けて

$$R = \frac{\rho^2}{S_0}\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 + \alpha\tanh\left(\frac{\alpha\gamma}{2}t - \phi\right)\right)$$

を得る。ただし、

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}, \quad \phi = \tanh^{-1}\left(\frac{\frac{S_0}{\rho} - 1}{\alpha}\right)$$

である（付録を参照）。

感染者数の時間変化

除外者数 R を微分すれば

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\rho^2\alpha^2\gamma}{2S_0}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\alpha\gamma}{2}t - \phi\right)$$

となる。これより、感染者数 I の時間変化は

$$I = \frac{1}{\gamma}\frac{dR}{dt} = \frac{\rho^2\alpha^2}{2S_0}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\alpha\gamma}{2}t - \phi\right)$$

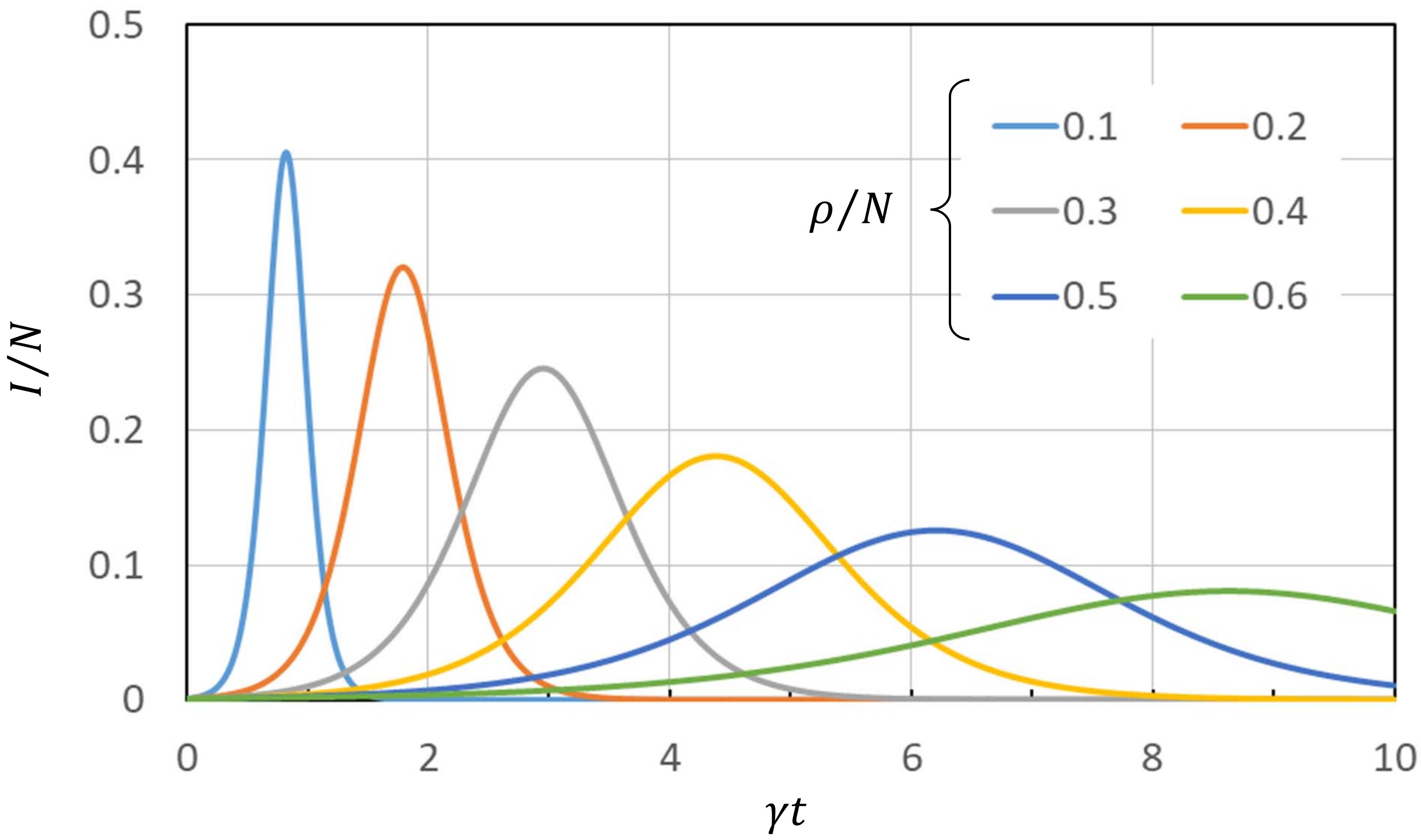
である。これは、$t = 2\phi/\alpha\gamma$ において、最大値

$$I_{max} = \frac{\rho^2\alpha^2}{2S_0} = \frac{\rho^2}{2S_0}\left(\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}\right) = N - \rho - \frac{S_0}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{{S_0}^2}\right)$$

をとる。

感染者数の時間変化

閾値 ρ が小さいほど短期間で感染が拡大し、ピーク時の感染者数が増える。



$S_0/N = 0.999$
（$I_0/N = 0.001$）

まとめ

- 伝染病の感染の時間変化は、閾値 $\rho = \gamma/\beta$（除外速度 γ と伝染速度 β の比）で決まる。閾値 ρ が小さいほど感染は拡大する。
- 非感染者数 S が閾値 ρ より小さければ、（いくら感染者が多くても）時間とともに感染者数 I は減少し、最終的には $I = 0$ になる。初期感染者数 S_0 が同じならば閾値 ρ が小さいほど最終的な非感染者は少なくなる。
- 閾値 ρ が小さいほど短期間で感染が拡大し、ピーク時の感染者数が増える。

参考文献

・M. ブラウン「微分方程式 下　その数学と応用」シュプリンガー・フェアラーク東京、2001.