鹿児島大学　渡邉研究室
wata104@eee

三角関数の厳密値（3° 刻み）

1. はじめに

三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$ の厳密値を 3° 刻みで求める。計算には、三平方の定理から成り立つ関係式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

および加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

を用いる。さらに、加法定理から導かれる余角の公式

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$

と、2 倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

も用いる。

余角の公式に加えて、補角の公式

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

と負角の公式

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

および三角関数の周期性

$$\sin(\theta + 360° \times n) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + 360° \times n) = \cos\theta$$

（ここで、n は整数）を考えると、$\theta = 0°, 3°, 6°, 9°, \cdots, 90°$ において $\sin\theta$ の値を求めれば、3° の整数倍の任意の θ について $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値が定まることがわかる。なお、角度 θ が鋭角の範囲 $0° \leq \theta \leq 90°$ において、$0 \leq \sin\theta \leq 1$, $0 \leq \cos\theta \leq 1$ である。

また、以下の値は既知とする。

$$\sin 0° = \cos 90° = 0$$
$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$
$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

鹿児島大学　渡邉研究室
wata104@eee

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

なお、これらの値は

$$\sin 0^\circ = 0$$

のみから、上記の公式を用いて導くこともできる（付録 1 参照）。

以下の各章では、これらの公式と値を用いて、下表に示すように、15° 刻み、18° 刻み、9° 刻み、6° 刻み、3° 刻みの順で $\sin\theta$ の厳密値を系統的に求めていく。

<table>
<tr><th>既知
（有名角）</th><th>15° 刻み</th><th>18° 刻み</th><th>9° 刻み</th><th>6° 刻み</th><th>3° 刻み</th></tr>
<tr><td>0°</td><td></td><td></td><td>9°</td><td>6°</td><td>3°</td></tr>
<tr><td></td><td>15°</td><td>18°</td><td></td><td>12°</td><td>21°</td></tr>
<tr><td>30°</td><td></td><td rowspan="2">36°</td><td>27°</td><td>24°</td><td>33°</td></tr>
<tr><td rowspan="2">45°</td><td></td><td></td><td>42°</td><td>39°</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">54°</td><td></td><td>48°</td><td>51°</td></tr>
<tr><td>60°</td><td></td><td>63°</td><td>66°</td><td>57°</td></tr>
<tr><td></td><td>75°</td><td>72°</td><td></td><td>78°</td><td>69°</td></tr>
<tr><td>90°</td><td></td><td></td><td>81°</td><td>84°</td><td>87°</td></tr>
</table>

2. 15° 刻みの厳密値

加法定理を用いて

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \sin 45^\circ \sin 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

を得る。なお、これは 2 倍角の公式を用いて

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

より

$$2\sin^2 15^\circ = 1 - \cos 30^\circ = 1 - \sin 60^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

であるから、$\sin 15^\circ > 0$ より

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

として求めることもできる。

同様に、加法定理を用いて

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \sin 45^\circ \sin 60^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

を得る。なお、これは $\sin 15^\circ$ の値から余角の公式を用いて

$$\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 15^\circ} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

として求めることもできる。

これで、既知の値と合わせて $\theta = 0^\circ, \underline{15^\circ}, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, \underline{75^\circ}, 90^\circ$ における $\sin\theta$ の値が求められた（下線が今回、$\sin\theta$ の値を得た角度である）。まずは、$\sin\theta$ の厳密値が 15° 刻みで得られたことになる。

3．18° 刻みの厳密値

$5 \times 18° = 90°$ より $3 \times 18° = 90° - 2 \times 18°$ であるから

$$\sin(3 \times 18°) = \sin(90° - 2 \times 18°)$$

であり、右辺に余角の公式を用いると

$$\sin(3 \times 18°) = \cos(2 \times 18°)$$

となる。つまり、$\theta = 18°$ のとき

$$\sin 3\theta = \cos 2\theta$$

である。これに加法定理を用いて

$$\sin(2\theta + \theta) = \cos 2\theta$$
$$\sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta = \cos 2\theta$$
$$\sin 2\theta \cos\theta = \cos 2\theta\,(1 - \sin\theta)$$
$$2\sin\theta\cos^2\theta = (1 - 2\sin^2\theta)(1 - \sin\theta)$$
$$2\sin\theta\,(1 - \sin^2\theta) = (1 - 2\sin^2\theta)(1 - \sin\theta)$$
$$2\sin\theta\,(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = (1 - 2\sin^2\theta)(1 - \sin\theta)$$
$$(1 - \sin\theta)(2\sin\theta + 2\sin^2\theta - 1 + 2\sin^2\theta) = 0$$
$$(1 - \sin\theta)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$$

となる。ここで、$\sin\theta \neq 1$ より

$$\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

となり、さらに $\sin\theta > 0$ より

$$\sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

すなわち

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

を得る。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 72° = \cos(90° - 72°) = \cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$$
$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

を得る。

また、余角の公式と 2 倍角の公式より

$$\sin 54° = \cos(90° - 54°) = \cos 36° = \cos(2 \times 18°) = 1 - 2\sin^2 18°$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

を得る。

　そして、これより、余角の公式を用いて

$$\sin 36° = \cos(90° - 36°) = \cos 54° = \sqrt{1 - \sin^2 54°}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

を得る。

　これで、$\theta = 18°, 36°, 54°, 72°$ における $\sin\theta$ の値が求められた。つまり、既知の $\theta = 0°, 90°$ と合わせて $\sin\theta$ の厳密値が $18°$ 刻みで得られたことになる。

4．9° 刻みの厳密値

$$\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

および

$$\sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

より、加法定理を用いて

$$\sin 9° = \sin(54° - 45°) = \sin 54° \cos 45° - \cos 54° \sin 45°$$

$$= \sin 54° \cos 45° - \sin 36° \sin 45°$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 18° = 1 - 2\sin^2 9°$$

より

$$2\sin^2 9° = 1 - \cos 18° = 1 - \sin 72° = 1 - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin^2 9° = \frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

であるから

$$\sin 9° = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

を得る。これら 2 つの式は一見異なっているように思えるが、

$$\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}\right)^2 = \left(\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2 + \left(10-2\sqrt{5}\right) - 2\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{32}$$

$$= \frac{\left(6+2\sqrt{5}\right) + \left(10-2\sqrt{5}\right) - 2\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2 \cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16-2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32} = \frac{16-2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)(5-1)}}{32}$$

$$= \frac{16 - 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right) \cdot 4}}{32} = \frac{16 - 4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}}{32} = \frac{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

であるから、実は一致している。すなわち、

$$\sin 9^\circ = \sqrt{2}\frac{\sqrt{5} + 1 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}$$

である。

　また、これより、余角の公式を用いて

$$\sin 81^\circ = \cos(90^\circ - 81^\circ) = \cos 9^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 9^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}$$

を得る。いっぽう、加法定理を用いると

$$\sin 81^\circ = \sin(180^\circ - 99^\circ) = \sin 99^\circ = \sin(54^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 54^\circ \cos 45^\circ + \cos 54^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \sin 54^\circ \cos 45^\circ + \sin 36^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}$$

を得る。これら 2 つの式も

$$\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}\right)^2 = \left(\frac{\left(\sqrt{5} + 1\right) + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2 + \left(10 - 2\sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{5} + 1\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{32}$$

$$= \frac{\left(6 + 2\sqrt{5}\right) + \left(10 - 2\sqrt{5}\right) + 2\sqrt{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2 \cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16 + 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)}}{32} = \frac{16 + 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} + 1\right)(5 - 1)}}{32}$$

$$= \frac{16 + 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot 4}}{32} = \frac{16 + 4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}}{32} = \frac{4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

であるから、一致している。すなわち、

$$\sin 81° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

である。

同様にして、付録 2 に示すように

$$\sin 27° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

および

$$\sin 63° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

を得る。

これで、既知の値と合わせて $\theta = 0°,\ \underline{9°},\ 18°,\ \underline{27°},\ 36°,\ 45°,\ 54°,\ \underline{63°},\ 72°,\ \underline{81°},\ 90°$ における $\sin\theta$ の値が求められた（下線が今回、$\sin\theta$ の値を得た角度である）。つまり、$\sin\theta$ の厳密値が $9°$ 刻みで得られたことになる。

5．6° 刻みの厳密値

$$\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

および

$$\sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

より、加法定理を用いて

$$\begin{aligned}\sin 6° &= \sin(36°-30°) = \sin 36° \cos 30° - \cos 36° \sin 30° \\ &= \sin 36° \sin 60° - \sin 54° \sin 30° \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}+1\right)}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8}\end{aligned}$$

を得る。この式は、一見これ以上簡単にできそうには思えないが、

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2}{64}$$

$$= \frac{3\left(10-2\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5}+1\right)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(30-6\sqrt{5}\right) + \left(6+2\sqrt{5}\right) - 2\sqrt{3 \cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right) \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{36-4\sqrt{5} - 2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}}{64} = \frac{36-4\sqrt{5} - 2\sqrt{6\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}+1\right)}}{64}$$

$$= \frac{36-4\sqrt{5} - 2\sqrt{6\sqrt{5} \cdot 4\left(\sqrt{5}+1\right)}}{64} = \frac{36-4\sqrt{5} - 4\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{64} = \frac{9-\sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから

$$\sin 6° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9-\sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

と表すこともできる。

また、これより、余角の公式を用いて

$$\sin 84° = \cos(90°-84°) = \cos 6° = \sqrt{1-\sin^2 6°}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9 - \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}{16}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}$$

を得る。いっぽう、加法定理を用いると

$$\sin 84° = \sin(30° + 54°) = \sin 30° \cos 54° + \cos 30° \sin 54°$$

$$= \sin 30° \sin 36° + \cos 30° \sin 54°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)}{8}$$

を得る。これら 2 つの式は

$$\left(\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)}{8}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)\right)^2}{64}$$

$$= \frac{\left(10 - 2\sqrt{5}\right) + 3\left(\sqrt{5} + 1\right)^2 + 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(10 - 2\sqrt{5}\right) + 3\left(6 + 2\sqrt{5}\right) + 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot 3 \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{28 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)}}{64} = \frac{28 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6\sqrt{5}(5 - 1)\left(\sqrt{5} + 1\right)}}{64}$$

$$= \frac{28 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6\sqrt{5} \cdot 4\left(\sqrt{5} + 1\right)}}{64} = \frac{28 + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}{64} = \frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、やはり一致している。すなわち、

$$\sin 84° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}\left(\sqrt{5} + 1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6\left(5 + \sqrt{5}\right)}}$$

である。

同様にして、付録 3 に示すように

$$\sin 12° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5 - \sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 24^\circ = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 42^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

および

$$\sin 48^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 66^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 78^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。

これで、既知の値と合わせて $\theta = 0^\circ$, $\underline{6^\circ}$, $\underline{12^\circ}$, 18°, $\underline{24^\circ}$, 30°, 36°, $\underline{42^\circ}$, $\underline{48^\circ}$, 54°, 60°, $\underline{66^\circ}$, 72°, $\underline{78^\circ}$, $\underline{84^\circ}$, 90° における $\sin\theta$ の値が求められた（下線が今回、$\sin\theta$ の値を得た角度である）。つまり、$\sin\theta$ の厳密値が 6° 刻みで得られたことになる。

6. 3° 刻みの厳密値

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

および

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

より、加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\
&= \sin 18^\circ \sin 75^\circ - \sin 72^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{16} \\
&= \sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}
\end{aligned}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 6^\circ = 1 - 2\sin^2 3^\circ$$

より

$$2\sin^2 3^\circ = 1 - \cos 6^\circ = 1 - \sin 84^\circ$$

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1-\sin 84^\circ}{2}}$$

であり

$$\sin 84^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

であるから

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{8}\left(4-\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

と表すこともできる。ここで、これら 3 つの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(10+2\sqrt{5}\right)-2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\left(8\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)-2(3-1)\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{128}$$

$$= \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)-4\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot 2\sqrt{5}}}{128}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot 2\sqrt{5}}}{32}$$

$$= \frac{\left(6+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)+\left(10-5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)-\sqrt{(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot 2\sqrt{5}}}{32}$$

$$= \frac{16-2\sqrt{3}-2\sqrt{15}-2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot 2\sqrt{5}}}{32} = \frac{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 3^\circ = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)-2\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

である。

　これを用いて、付録 4 に示すように

$$\sin 21° = \sin(36° - 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7 - \sqrt{5} + \sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 33° = \sin(18° + 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) + (\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 39° = \sin(54° - 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 51° = \cos(54° - 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 57° = \cos(18° + 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 69° = \cos(36° - 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) + (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{7 - \sqrt{5} + \sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 87° = \cos(18° - 15°) = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

を得る。

以上より、既知の値と合わせて $\theta = 0°$, $\underline{3°}$, $6°$, $9°$, $12°$, $15°$, $18°$, $\underline{21°}$, $24°$, $27°$, $30°$, $\underline{33°}$, $36°$, $\underline{39°}$, $42°$, $45°$, $48°$, $\underline{51°}$, $54°$, $\underline{57°}$, $60°$, $63°$, $66°$, $\underline{69°}$, $72°$, $75°$, $78°$, $81°$, $84°$, $\underline{87°}$, $90°$ における $\sin\theta$ の値が求められた（下線が今回、$\sin\theta$ の値を得た角度である）。つまり、$\sin\theta$ の厳密値が $3°$ 刻みで得られたことになる。

7. まとめ

三角関数の公式（三平方の定理、加法定理など）を用いて、$\theta = 0°, 3°, 6°, 9°, \cdots, 90°$ における $\sin\theta$ の厳密値を求めた。同じ角度における $\cos\theta$ の厳密値は、余角の公式

$$\cos\theta = \sin(90° - \theta)$$

から求めることができる。得られた結果を以下にまとめて示す。

$$\sin 0° = \cos 90° = 0$$

$$\sin 3° = \cos 87° = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

$$\sin 6° = \cos 84° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9 - \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 9° = \cos 81° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\sin 12° = \cos 78° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin 21° = \cos 69° = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}}$$

$$\sin 24° = \cos 66° = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 27° = \cos 63° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1}{8} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 33° = \cos 57° = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 36° = \cos 54° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 39° = \cos 51° = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 42° = \cos 48° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}$$

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 48° = \cos 42° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}$$

$$\sin 51° = \cos 39° = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\sin 57° = \cos 33° = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 63° = \cos 27° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\sin 66° = \cos 24° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 69° = \cos 21° = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}}$$

$$\sin 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 75° = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 78° = \cos 12° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 81° = \cos 9° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\sin 84° = \cos 6° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

$$\sin 87° = \cos 3° = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

$$\sin 90° = \cos 0° = 1$$

（付録 1）

$$\sin 0° = 0$$

のみを既知とする。

まず、余角の公式を用いて

$$\cos 90° = \sin(90° - 90°) = \sin 0° = 0$$

となるから、関係式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

より

$$\sin 90° = \sqrt{1 - \cos^2 90°} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$

を得る。

次に、2 倍角の公式

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

において、$\theta = 45°$ とすると、$\cos 2\theta = \cos 90° = 0$ であるから

$$0 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

となり、$\sin\theta > 0$ より

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

すなわち

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

を得る。

そして、加法定理と 2 倍角の公式より、次の 3 倍角の公式

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta\,(1 - \sin^2\theta) - \sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

が導かれるから、$\theta = 30°$ とすると、$\sin 3\theta = \sin 90° = 1$ より

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1$$

$$4\sin^3\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$$

$$(\sin\theta + 1)(4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1) = 0$$

$$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1)^2 = 0$$

となり、$\sin\theta \neq -1$ より

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

すなわち

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

を得る。

さらに、余角の公式を用いて

$$\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得る。

（付録 2）

加法定理を用いて

$$\sin 27° = \sin(45° - 18°) = \sin 45° \cos 18° - \cos 45° \sin 18°$$
$$= \sin 45° \sin 72° - \cos 45° \sin 18°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1}{8}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 54° = 1 - 2\sin^2 27°$$

より

$$2\sin^2 27° = 1 - \cos 54° = 1 - \sin 36° = 1 - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin^2 27° = \frac{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}$$

であるから

$$\sin 27° = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}}$$

を得る。これら 2 つの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1}{8}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5} - 1\right)}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(10 + 2\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5} - 1\right)^2 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5} - 1\right)}{32}$$

$$= \frac{\left(10 + 2\sqrt{5}\right) + \left(6 - 2\sqrt{5}\right) - 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)^2}}{32}$$

$$= \frac{16 - 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)}}{32} = \frac{16 - 2\sqrt{2\sqrt{5}(5 - 1)\left(\sqrt{5} - 1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16 - 2\sqrt{2\sqrt{5} \cdot 4\left(\sqrt{5} - 1\right)}}{32} = \frac{16 - 4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 1\right)}}{32} = \frac{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}$$

であるから、一致している。すなわち、

$$\sin 27° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

である。

　さらに、これより、余角の公式を用いて

$$\sin 63° = \cos(90°-63°) = \cos 27° = \sqrt{1-\sin^2 27°}$$

$$= \sqrt{1-\frac{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

を得る。いっぽう、加法定理を用いると

$$\sin 63° = \sin(45°+18°) = \sin 45° \cos 18° + \cos 45° \sin 18°$$

$$= \sin 45° \sin 72° + \cos 45° \sin 18°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$$

を得る。これら 2 つの式の値も

$$\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{5}-1\right)}{4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)}{32}$$

$$= \frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)+2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{32}$$

$$= \frac{16+2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32} = \frac{16+2\sqrt{2\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16+2\sqrt{2\sqrt{5}\cdot 4\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32} = \frac{16+4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32} = \frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$$

であるから、一致している。すなわち、

$$\sin 63° = \sqrt{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$$

である。

（付録 3）

加法定理を用いて

$$\sin 12^\circ = \sin(30^\circ - 18^\circ) = \sin 30^\circ \cos 18^\circ - \cos 30^\circ \sin 18^\circ$$
$$= \sin 30^\circ \sin 72^\circ - \cos 30^\circ \sin 18^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$$

を得る。ここで、

$$\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}\right)^2 = \frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)+3\left(\sqrt{5}-1\right)^2-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)+3\left(6-2\sqrt{5}\right)-2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot 3\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{28-4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{28-4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64}$$

$$\frac{28-4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\cdot 4\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{28-4\sqrt{5}-4\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、

$$\sin 12^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 78^\circ = \cos(90^\circ - 78^\circ) = \cos 12^\circ = \sqrt{1-\sin^2 12^\circ}$$
$$= \sqrt{1-\frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。いっぽう、加法定理を用いると

$$\sin 78^\circ = \sin(60^\circ + 18^\circ) = \sin 60^\circ \cos 18^\circ + \cos 60^\circ \sin 18^\circ$$
$$= \sin 60^\circ \sin 72^\circ + \cos 60^\circ \sin 18^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$$

を得る。なお、この式は 2 倍角の公式を用いて

$$\cos 12° = 1 - 2\sin^2 6° = 1 - 2 \cdot \frac{9-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16} = 1 - \frac{9-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{8}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{8} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$$

より

$$\sin 78° = \cos 12° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$$

として求めることもできる。これらの式の値は、

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}\right)^2 = \frac{3\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(30+6\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)+2\sqrt{3\cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{36+4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{36+4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64}$$

$$= \frac{36+4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}\cdot 4\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{64} = \frac{9+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、一致している。すなわち、

$$\sin 78° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

である。

同様に、加法定理を用いて

$$\sin 24° = \sin(54° - 30°) = \sin 54° \cos 30° - \cos 54° \sin 30°$$

$$= \sin 54° \cos 30° - \sin 36° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$$

を得る。ここで、

$$\left(\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}\right)^2=\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(10-2\sqrt{5}\right)-2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{64}$$

$$=\frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(10-2\sqrt{5}\right)-2\sqrt{3\left(\sqrt{5}+1\right)^2\cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64}$$

$$=\frac{28+4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64}=\frac{28+4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)(5-1)}}{64}$$

$$=\frac{28+4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot 4}}{64}=\frac{28+4\sqrt{5}-4\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{64}=\frac{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、

$$\sin 24^\circ=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 66^\circ=\cos(90^\circ-66^\circ)=\cos 24^\circ=\sqrt{1-\sin^2 24^\circ}$$

$$=\sqrt{1-\frac{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16}}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 24^\circ=1-2\sin^2 12^\circ=1-2\cdot\frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}=1-\frac{7-\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{8}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{8}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8}$$

より

$$\sin 66^\circ=\cos 24^\circ=\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8}$$

を得る。なお、この式は加法定理を用いて

$$\sin 66° = \sin(180° - 114°) = \sin 114° = \sin(60° + 54°)$$
$$= \sin 60° \cos 54° + \cos 60° \sin 54°$$
$$= \sin 60° \sin 36° + \cos 60° \sin 54°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8}$$

として求めることもできる。これらの式の値は、

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8}\right)^2 = \frac{3\left(10-2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(30-6\sqrt{5}\right)+\left(6+2\sqrt{5}\right)+2\sqrt{3\cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{36-4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}}{64} = \frac{36-4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}+1\right)}}{64}$$

$$= \frac{36-4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}\cdot 4\left(\sqrt{5}+1\right)}}{64} = \frac{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{64} = \frac{9-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、一致している。すなわち、

$$\sin 66° = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

である。

さらに、加法定理を用いて

$$\sin 42° = \sin(60° - 18°) = \sin 60° \cos 18° - \cos 60° \sin 18°$$
$$= \sin 60° \sin 72° - \cos 60° \sin 18°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}$$

を得る。なお、この式は 2 倍角の公式を用いて

$$\cos 48° = 1 - 2\sin^2 24° = 1 - 2\cdot\frac{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{16} = 1 - \frac{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{8}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}{8} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}$$

より

$$\sin 42^\circ = \cos 48^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}$$

として求めることもできる。ここで、

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8}\right)^2 = \frac{3\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(30+6\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)-2\sqrt{3\cdot 2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{36+4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{36+4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64}$$

$$= \frac{36+4\sqrt{5}-2\sqrt{6\sqrt{5}\cdot 4\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{36+4\sqrt{5}-4\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{64} = \frac{9+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、

$$\sin 42^\circ = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 48^\circ = \cos(90^\circ - 48^\circ) = \cos 42^\circ = \sqrt{1-\sin^2 42^\circ}$$

$$= \sqrt{1-\frac{9+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}} = \sqrt{\frac{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

を得る。いっぽう、加法定理を用いると

$$\sin 48^\circ = \sin(30^\circ + 18^\circ) = \sin 30^\circ \cos 18^\circ + \cos 30^\circ \sin 18^\circ$$

$$= \sin 30^\circ \sin 72^\circ + \cos 30^\circ \sin 18^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$$

を得る。これら 2 つの式の値は、

$$\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}\right)^2 = \frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)+3\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{64}$$

$$= \frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)+3\left(6-2\sqrt{5}\right)+2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot 3\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{64}$$

$$= \frac{28-4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{28-4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64}$$

$$= \frac{28-4\sqrt{5}+2\sqrt{6\sqrt{5}\cdot 4\left(\sqrt{5}-1\right)}}{64} = \frac{28-4\sqrt{5}+4\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{64} = \frac{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}{16}$$

であるから、一致している。すなわち、

$$\sin 48° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

である。

（付録 4）

$$\sin 3^\circ = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

より、余角の公式を用いて

$$\sin 87^\circ = \cos(90^\circ-87^\circ)=\cos 3^\circ=\sqrt{1-\sin^2 3^\circ}$$

$$=\sqrt{1-\frac{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 87^\circ = \sqrt{1-\frac{1}{16}\left(8-2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}\left(8+2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

を得る。いっぽう、余角の公式と加法定理を用いると

$$\sin 87^\circ = \cos(90^\circ-87^\circ)=\cos 3^\circ=\cos(18^\circ-15^\circ)=\cos 18^\circ\cos 15^\circ+\sin 18^\circ\sin 15^\circ$$

$$=\sin 72^\circ\sin 75^\circ+\sin 18^\circ\sin 15^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$=\sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$$

を得る。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}\right)^2$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2(10+2\sqrt{5})+(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{5}-1)^2+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{(8\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)+2(3-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)}{128}$$

$$= \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)+4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}\left(\sqrt{5}-1\right)}{128}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{32}$$

$$= \frac{\left(10+5\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)+\left(6-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)+\sqrt{2\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16+2\sqrt{3}+2\sqrt{15}+2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32} = \frac{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 87° = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

である。

また、加法定理を用いて

$$\sin 21° = \sin(36° - 15°) = \sin 36° \cos 15° - \cos 36° \sin 15°$$

$$= \sin 36° \sin 75° - \sin 54° \sin 15°$$

$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{16}$$

$$= \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{16}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 42° = 1 - 2\sin^2 21°$$

より

$$2\sin^2 21° = 1 - \cos 42° = 1 - \sin 48°$$

$$\sin 21^\circ = \sqrt{\frac{1-\sin 48^\circ}{2}}$$

であり

$$\sin 48^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}$$

であるから

$$\sin 21^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 21^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{8}\left(4-\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}}$$

と表すこともできる。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{16}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(10-2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(\sqrt{5}+1\right)^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(8\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)-2(3-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+1\right)}{128}$$

$$= \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)+4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)-4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}\left(\sqrt{5}+1\right)}{128}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{32}$$

$$= \frac{\left(10+5\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)+\left(6-3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)-\sqrt{2\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}+1\right)}}{32}$$

$$=\frac{16+2\sqrt{3}-2\sqrt{15}-2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}}{32}=\frac{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 21^\circ=\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{16}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}}$$

である。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 69^\circ=\cos(90^\circ-21^\circ)=\cos 21^\circ=\sqrt{1-\sin^2 21^\circ}$$

$$=\sqrt{1-\frac{8-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 69^\circ=\sqrt{1-\frac{1}{16}\left(8-2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}\left(8+2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)}}}$$

を得る。いっぽう、余角の公式と加法定理を用いると

$$\sin 69^\circ=\cos(90^\circ-69^\circ)=\cos 21^\circ=\cos(36^\circ-15^\circ)=\cos 36^\circ\cos 15^\circ+\sin 36^\circ\sin 15^\circ$$

$$=\sin 54^\circ\sin 75^\circ+\sin 36^\circ\sin 15^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{16}$$

$$=\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

を得る。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}\right)^2$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2(10-2\sqrt{5})+2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{(8\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{(4+2\sqrt{3})(6+2\sqrt{5})+(4-2\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})+2(3-1)(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{128}$$

$$=\frac{4(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})+4(2-\sqrt{3})(5-\sqrt{5})+4(\sqrt{5}+1)\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{128}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})+(2-\sqrt{3})(5-\sqrt{5})+\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)^2(\sqrt{5}-1)}}{32}$$

$$=\frac{(6+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15})+(10-5\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15})+\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)(5-1)}}{32}$$

$$=\frac{16-2\sqrt{3}+2\sqrt{15}+2\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}{32}=\frac{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 69° = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

である。

同様に、加法定理を用いて

$$\sin 33° = \sin(18°+15°) = \sin 18° \cos 15° + \cos 18° \sin 15°$$

$$= \sin 18° \sin 75° + \sin 72° \sin 15°$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$=\sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 66° = 1 - 2\sin^2 33°$$

より

$$2\sin^2 33° = 1 - \cos 66° = 1 - \sin 24°$$

$$\sin 33° = \sqrt{\frac{1 - \sin 24°}{2}}$$

であり

$$\sin 24° = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}$$

であるから

$$\sin 33° = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 33° = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{8}\left(4 - \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

と表すこともできる。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(10+2\sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\left(8\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right) + \left(4-2\sqrt{3}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right) + 2(3-1)\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{128}$$

$$= \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right) + 4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right) + 4\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}}{128}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5}) + (2-\sqrt{3})(5+\sqrt{5}) + \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^2(\sqrt{5}+1)}}{32}$$

$$= \frac{(6+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{15}) + (10-5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}) + \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)(5-1)}}{32}$$

$$= \frac{16-2\sqrt{3}-2\sqrt{15}+2\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{32} = \frac{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 33° = \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

である。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 57° = \cos(90° - 33°) = \cos 33° = \sqrt{1-\sin^2 33°}$$

$$= \sqrt{1-\frac{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 57° = \sqrt{1-\frac{1}{16}\left(8-2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}\left(8+2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}$$

を得る。いっぽう、余角の公式と加法定理を用いると

$$\sin 57° = \cos(90° - 57°) = \cos 33° = \cos(18° + 15°) = \cos 18° \cos 15° - \sin 18° \sin 15°$$

$$= \sin 72° \sin 75° - \sin 18° \sin 15°$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{16}$$

$$= \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{16}$$

を得る。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{16}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(8\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)-2(3-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)}{128}$$

$$= \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)+4\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}\left(\sqrt{5}-1\right)}{128}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{32}$$

$$= \frac{\left(10+5\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)+\left(6-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)-\sqrt{2\sqrt{5}(5-1)\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16+2\sqrt{3}+2\sqrt{15}-2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}{32} = \frac{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 57° = \sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}$$

である。

さらに、加法定理を用いて

$$\sin 39° = \sin(54° - 15°) = \sin 54° \cos 15° - \cos 54° \sin 15°$$

$$= \sin 54° \sin 75° - \sin 36° \sin 15°$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{16}$$

$$= \sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

を得る。いっぽう、2 倍角の公式を用いると

$$\cos 78° = 1 - 2\sin^2 39°$$

より

$$2\sin^2 39° = 1 - \cos 78° = 1 - \sin 12°$$

$$\sin 39° = \sqrt{\frac{1-\sin 12°}{2}}$$

であり、

$$\sin 12° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}$$

であるから

$$\sin 39° = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 39° = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{8}\left(4 - \sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

と表すこともできる。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}\right)^2$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2(10-2\sqrt{5}) - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{(8\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{(4+2\sqrt{3})(6+2\sqrt{5})+(4-2\sqrt{3})(10-2\sqrt{5})-2(3-1)(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{128}$$

$$= \frac{4(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})+4(2-\sqrt{3})(5-\sqrt{5})-4(\sqrt{5}+1)\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{128}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})+(2-\sqrt{3})(5-\sqrt{5})-\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)^2(\sqrt{5}-1)}}{32}$$

$$= \frac{(6+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15})+(10-5\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15})-\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)(5-1)}}{32}$$

$$= \frac{16-2\sqrt{3}+2\sqrt{15}-2\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}{32} = \frac{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\sin 39° = \sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

である。

これより、余角の公式を用いて

$$\sin 51° = \cos(90°-51°) = \cos 39° = \sqrt{1-\sin^2 39°}$$

$$= \sqrt{1-\frac{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}} = \sqrt{\frac{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

あるいは

$$\sin 51° = \sqrt{1-\frac{1}{16}\left(8-2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}\left(8+2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}}$$

を得る。いっぽう、余角の公式と加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\sin 51° &= \cos(90° - 51°) = \cos 39° = \cos(54° - 15°) = \cos 54° \cos 15° + \sin 54° \sin 15° \\ &= \sin 36° \sin 75° + \sin 54° \sin 15° \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) + \left(\sqrt{5} + 1\right) \cdot \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{16} \\ &= \sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)}{16}\end{aligned}$$

を得る。これらの式の値は、

$$\left(\sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)}{16}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2\left(10 - 2\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2\left(\sqrt{5} + 1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)}{\left(8\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4 + 2\sqrt{3}\right)\left(10 - 2\sqrt{5}\right) + \left(4 - 2\sqrt{3}\right)\left(6 + 2\sqrt{5}\right) + 2(3 - 1)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5} + 1\right)}{128}$$

$$= \frac{4\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right) + 4\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) + 4\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 1\right)}\left(\sqrt{5} + 1\right)}{128}$$

$$= \frac{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(5 - \sqrt{5}\right) + \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) + \sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)^2}}{32}$$

$$= \frac{\left(10 + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \sqrt{15}\right) + \left(6 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{15}\right) + \sqrt{2\sqrt{5}(5 - 1)\left(\sqrt{5} + 1\right)}}{32}$$

$$= \frac{16 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{15} + 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5} + 1\right)}}{32} = \frac{8 - \sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$$

であるから、一致していることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned}\sin 51° &= \sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)}{16} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{6\left(5 - \sqrt{5}\right)}}}\end{aligned}$$

である。