ロジスティック分布

渡邉 俊夫

累積分布関数

累積分布関数が

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-ax}}$$

で表される確率分布を**ロジスティック分布**という。

この累積分布関数は

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax/2}}{\mathrm{e}^{ax/2} + \mathrm{e}^{-ax/2}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\mathrm{e}^{ax/2} + \mathrm{e}^{-ax/2}\right) + \left(\mathrm{e}^{ax/2} - \mathrm{e}^{-ax/2}\right)}{\mathrm{e}^{ax/2} + \mathrm{e}^{-ax/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{ax/2} - \mathrm{e}^{-ax/2}}{\mathrm{e}^{ax/2} + \mathrm{e}^{-ax/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{ax}{2}\right)$$

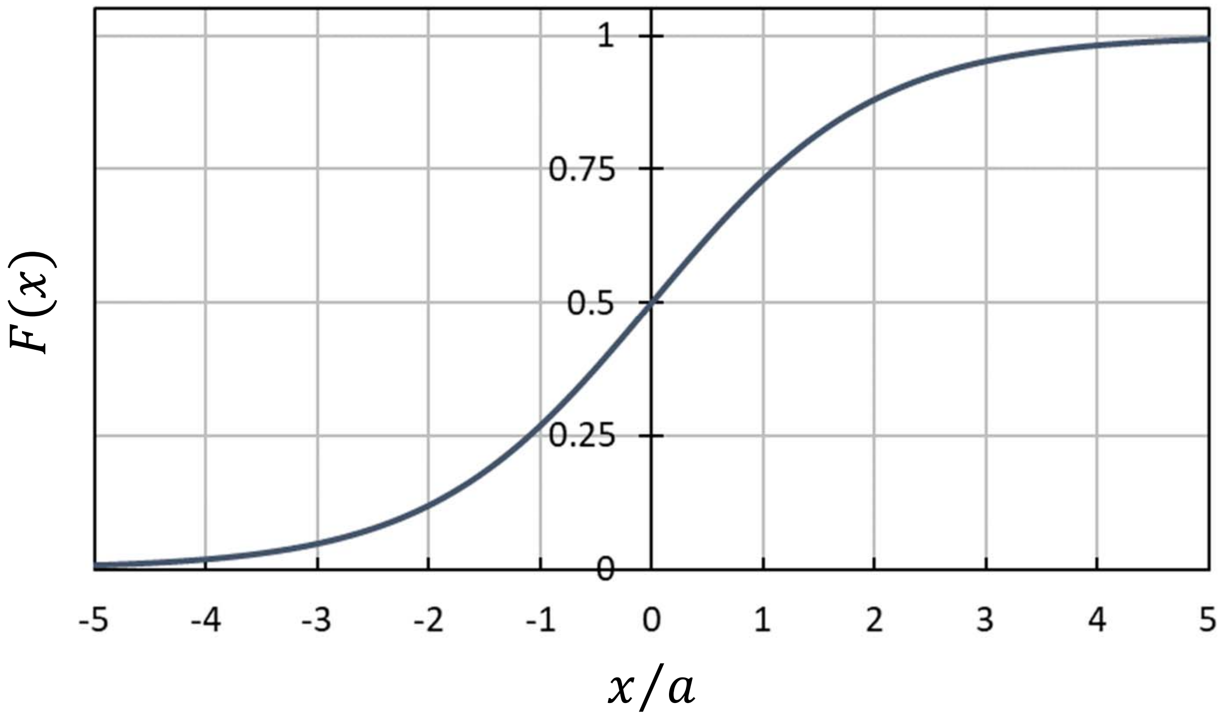
とも表せる。

双曲線正接関数 $\tanh x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$

累積分布関数

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-ax}} = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{ax}{2}\right)$$

のグラフを下図に示す。



確率密度関数

ロジスティック分布の確率密度関数は

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-ax}}\right) = \frac{a\mathrm{e}^{-ax}}{(1+\mathrm{e}^{-ax})^2}$$

で表される。

この確率密度関数は

$$f(x) = \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax}+1)^2} = \frac{a\left(\mathrm{e}^{ax/2}\right)^2}{(\mathrm{e}^{ax}+1)^2} = \frac{a}{(\mathrm{e}^{ax/2}+\mathrm{e}^{-ax/2})^2}$$

$$= \frac{a}{4}\left(\frac{2}{\mathrm{e}^{ax/2}+\mathrm{e}^{-ax/2}}\right)^2 = \frac{a}{4}\operatorname{sech}^2\frac{ax}{2}$$

とも表せる。

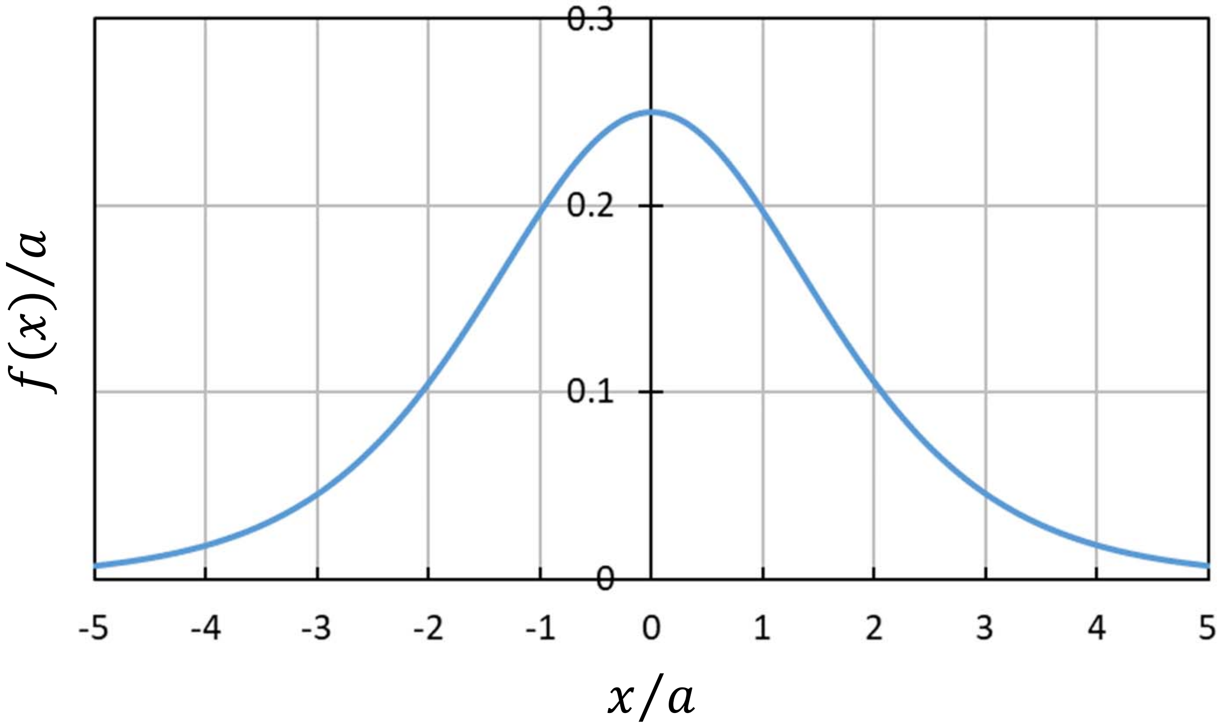
双曲線正割関数

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$$

確率密度関数

$$f(x) = \frac{a\mathrm{e}^{-ax}}{(1+\mathrm{e}^{-ax})^2} = \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax}+1)^2} = \frac{a}{4}\mathrm{sech}^2\frac{ax}{2}$$

のグラフを下図に示す。



確率密度関数：規格化

ロジスティック分布の確率密度関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\mathrm{e}^{-ax}}{(1+\mathrm{e}^{-ax})^2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \frac{a\mathrm{e}^{-ax}}{(1+\mathrm{e}^{-ax})^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-ax}}\right]_0^{\infty} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

だから、確かに規格化されている。

確率密度関数：2乗平均

ロジスティック分布の2乗平均は

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax}+1)^2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} x^2 \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax}+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\left[x^2 \frac{-1}{\mathrm{e}^{ax}+1}\right]_0^{\infty} - 2\int_0^{\infty} 2x \frac{-1}{\mathrm{e}^{ax}+1}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{\infty} x \frac{1}{\mathrm{e}^{ax}+1}\mathrm{d}x = 4\int_0^{\infty} x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{1+\mathrm{e}^{-ax}}\mathrm{d}x \\
&= 4\left[x \frac{\log(1+\mathrm{e}^{-ax})}{-a}\right]_0^{\infty} - 4\int_0^{\infty} \frac{\log(1+\mathrm{e}^{-ax})}{-a}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{a}\int_0^{\infty} \log(1+\mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

確率密度関数:2乗平均

ロジスティック分布の2乗平均は

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x &= \frac{4}{a}\int_0^{\infty} \log(1+\mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{a}\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\mathrm{e}^{-ax})^n}{n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-nax}\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\frac{\mathrm{e}^{-nax}}{-na}\right]_0^{\infty} = \frac{4}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}
\end{aligned}
$$

確率密度関数:2乗平均

ここで、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}$$

より

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

確率密度関数:2乗平均

したがって、ロジスティック分布の2乗平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \frac{4}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$= \frac{4}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{4}{a^2}\left(\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right)\right)$$

$$= \frac{4}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24}\right) = \frac{4}{a^2} \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3a^2}$$

確率密度関数:分散

ロジスティック分布の平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0$$

だから、ロジスティック分布の分散を σ^2 とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3a^2} = \sigma^2 \qquad \therefore a = \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma}$$

である。

累積分布関数と確率密度関数

ロジスティック分布の分散を σ^2 とすると

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma}$$

だから、累積分布関数と確率密度関数は σ を用いて

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\pi x/\sqrt{3}\sigma}} = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{\pi x}{2\sqrt{3}\sigma}\right)$$

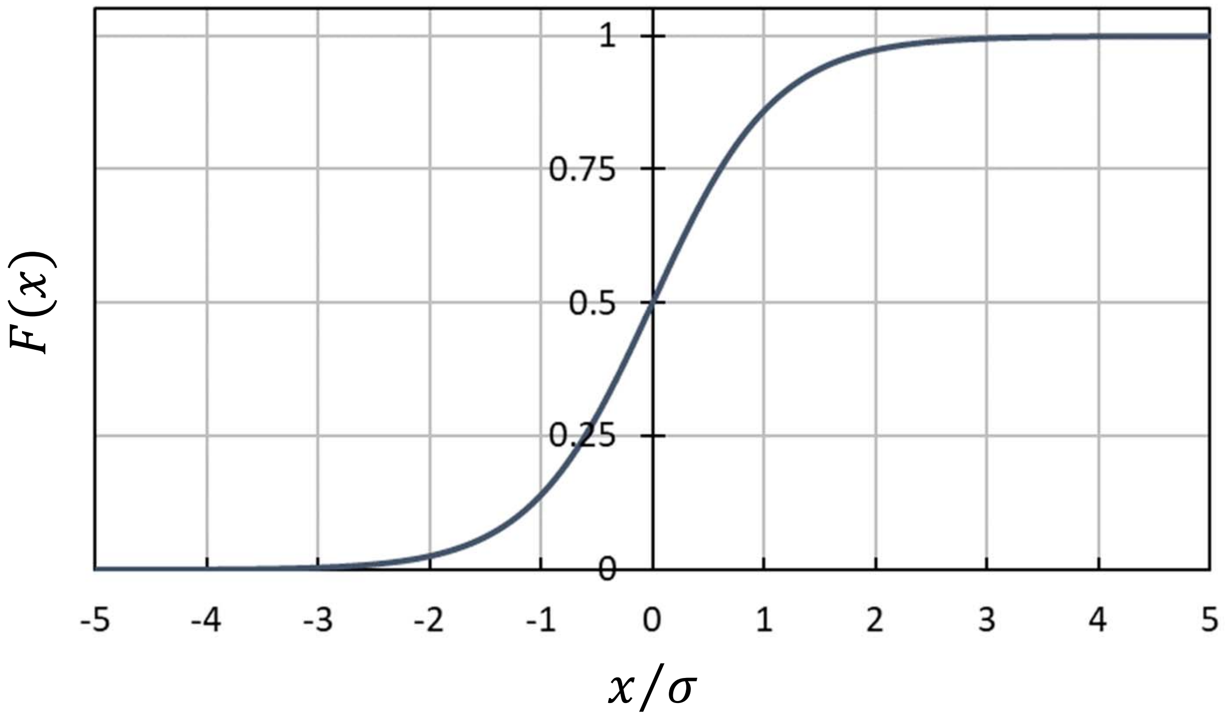
$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma}\frac{\mathrm{e}^{-\pi x/\sqrt{3}\sigma}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\pi x/\sqrt{3}\sigma}\right)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma}\mathrm{sech}^2\frac{\pi x}{2\sqrt{3}\sigma}$$

と表される。

累積分布関数

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\pi x/\sqrt{3}\sigma}} = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{\pi x}{2\sqrt{3}\sigma}\right)$$

のグラフを下図に示す。



確率密度関数

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma}\frac{\mathrm{e}^{-\pi x/\sqrt{3}\sigma}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\pi x/\sqrt{3}\sigma}\right)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma}\mathrm{sech}^2\frac{\pi x}{2\sqrt{3}\sigma}$$

のグラフを下図に示す。