

ヤコビアンの計算(2)

2026.7.27
渡邊 俊夫

問題

$$u = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy)$$

$$v = y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy)$$

$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$

のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$ を求めなさい。

ただし、 $p = u, v, w$ および $q = x, y, z$ として、 $p_q = \frac{\partial p}{\partial q}$ である。

媒介変数 s, t

$$s = 1 + xy$$

$$t = (1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy) = s^2 z + y^2(4 + 3xy)$$

とおくと

$$\begin{aligned} u &= (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy) \\ &= (1 + xy)\{(1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy)\} = st \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy) \\ &= y + 3x\{(1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy)\} = y + 3xt \end{aligned}$$

となる。

媒介変数 s, t

さらに

$$y = \frac{s-1}{x}$$

$$z = \frac{t - y^2(4 + 3xy)}{s^2} = \frac{t - y^2(4 + 3(s-1))}{s^2} = \frac{t - y^2(3s+1)}{s^2}$$

より

$$v = y + 3xt = \frac{s-1}{x} + 3xt$$

$$\begin{aligned} w &= 2x - 3x^2y - x^3z = x(2 - 3xy - x^2z) \\ &= x \left(2 - 3(s-1) - x^2 \frac{t - y^2(3s+1)}{s^2} \right) \end{aligned}$$

媒介変数 s, t

$$\begin{aligned} &= x \left(5 - 3s - \frac{x^2 t - x^2 y^2 (3s + 1)}{s^2} \right) = x \left(5 - 3s - \frac{x^2 t - (s - 1)^2 (3s + 1)}{s^2} \right) \\ &= \frac{x}{s^2} (5s^2 - 3s^3 - x^2 t + (s - 1)^2 (3s + 1)) \\ &= \frac{x}{s^2} (5s^2 - 3s^3 + (s^2 - 2s + 1)(3s + 1) - x^2 t) \\ &= \frac{x}{s^2} (5s^2 - 3s^3 + (3s^3 - 6s^2 + 3s + s^2 - 2s + 1) - x^2 t) \\ &= \frac{x(s + 1 - x^2 t)}{s^2} \end{aligned}$$

となる。

写像の分解

したがって、 $F: (x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ は

$$G: (x, y, z) \rightarrow (x, s, t)$$

$$s = 1 + xy$$

$$t = (1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy)$$

と

$$H: (x, s, t) \rightarrow (u, v, w)$$

$$v = \frac{s - 1}{x} + 3xt$$

$$w = \frac{x}{s^2}(s + 1 - x^2 t)$$

の合成写像で表される。

写像 G

$G: (x, y, z) \rightarrow (x, s, t)$ について

$$s_x = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1 + xy) = y$$

$$s_y = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(1 + xy) = x$$

$$s_z = \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(1 + xy) = 0$$

$$t_x = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}((1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy)) = 2y(1 + xy)z + 3y^3$$

$$t_y = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}((1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy)) = 2x(1 + xy)z + 8y + 9xy^2$$

$$t_z = \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}((1 + xy)^2 z + y^2(4 + 3xy)) = (1 + xy)^2$$

写像 G のヤコビアン

だから、 G のヤコビアンは

$$\begin{aligned} J_G &= \begin{vmatrix} x_x & x_y & x_z \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_y & s_z \\ t_y & t_z \end{vmatrix} = s_y t_z - s_z t_y \\ &= x \cdot (1 + xy)^2 - 0 \cdot t_y = x \cdot (1 + xy)^2 = xs^2 \end{aligned}$$

となる。

$H: (x, s, t) \rightarrow (u, v, w)$ について

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(st) = 0$$

$$u_s = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(st) = t$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(st) = s$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s-1}{x} + 3xt \right) = -\frac{s-1}{x^2} + 3t = -\frac{s-1-3x^2t}{x^2}$$

$$v_s = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s-1}{x} + 3xt \right) = \frac{1}{x}$$

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s-1}{x} + 3xt \right) = 3x$$

写像 H

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{s^2} (s + 1 - x^2 t) \right) = \frac{s + 1 - 2x^2 t}{s^2}$$

$$w_s = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x}{s^2} (s + 1 - x^2 t) \right) = x \left(-\frac{1}{s^2} - 2 \frac{1 - x^2 t}{s^3} \right) = -\frac{x(s + 2 - 2x^2 t)}{s^3}$$

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{s^2} (s + 1 - x^2 t) \right) = -\frac{x^3}{s^2}$$

写像 H のヤコビアン

だから、 H のヤコビアンは

$$\begin{aligned} J_H &= \begin{vmatrix} u_x & u_s & u_t \\ v_x & v_s & v_t \\ w_x & w_s & w_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & t & s \\ v_x & v_s & v_t \\ w_x & w_s & w_t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} v_t & v_x \\ w_t & w_x \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} v_x & v_s \\ w_x & w_s \end{vmatrix} \\ &= t(v_t w_x - v_x w_t) + s(v_x w_s - v_s w_x) \\ &= t \left(3x \cdot \frac{s+1-2x^2 t}{s^2} - \frac{s-1-3x^2 t}{x^2} \cdot \frac{x^3}{s^2} \right) \\ &\quad + s \left(\frac{s-1-3x^2 t}{x^2} \cdot \frac{x(s+2-2x^2 t)}{s^3} - \frac{1}{x} \cdot \frac{s+1-2x^2 t}{s^2} \right) \\ &= \frac{xt}{s^2} (3(s+1-2x^2 t) - (s-1-3x^2 t)) \\ &\quad + \frac{1}{xs^2} ((s-1-3x^2 t)(s+2-2x^2 t) - s(s+1-2x^2 t)) \end{aligned}$$

写像 H のヤコビアン

$$\begin{aligned} &= \frac{xt}{s^2} (2s + 4 - 6x^2t) \\ &\quad + \frac{1}{xs^2} ((s-1)(s+2) - 5sx^2t + 2x^2t - 6x^2t + 6x^4t^2 - s(s+1-3x^2t)) \\ &= \frac{xt}{s^2} (2s + 4 - 6x^2t) \\ &\quad + \frac{1}{xs^2} (s^2 + s - 2 - 5sx^2t - 4x^2t + 6x^4t^2 - s^2 - s + 3sx^2t) \\ &= \frac{xt}{s^2} (2s + 4 - 6x^2t) + \frac{1}{xs^2} (-2 - 2sx^2t - 4x^2t + 6x^4t^2) \\ &= -\frac{2}{xs^2} + \frac{xt}{s^2} (2s + 4 - 6x^2t) + \frac{xt}{s^2} (-2s - 4 + 6x^2t) \\ &= -\frac{2}{xs^2} \end{aligned}$$

写像 F のヤコビアン

したがって、 G と H の合成写像 F のヤコビアンは

$$J_F = J_G \cdot J_H = x_S^2 \cdot \left(-\frac{2}{x_S^2} \right) = -2$$

となる。

答

$$u = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy)$$

$$v = y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy)$$

$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$

のヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = -2$$

である。

参考文献

https://x.com/__alpoge__/status/2079028340955197566