

ヤコビアンの計算

2026.7.24
渡邊 俊夫

問題

$$u = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy)$$

$$v = y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy)$$

$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$

のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$ を求めなさい。

ただし、 $p = u, v, w$ および $q = x, y, z$ として、 $p_q = \frac{\partial p}{\partial q}$ である。

偏微分: u

まず、偏微分を計算する。

$$u = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy)$$

より、 u の偏微分は

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3y(1 + xy)^2 z + y^3(4 + 3xy) + 3y^3(1 + xy) \\ &= 3y^3(1 + xy) + y^3(4 + 3xy) + 3y(1 + xy)^2 z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = 3x(1 + xy)^2 z + 2y(1 + xy)(4 + 3xy) + xy^2(4 + 3xy) + 3xy^2(1 + xy) \\ &= 3xy^2(1 + xy) + xy^2(4 + 3xy) + 2y(1 + xy)(4 + 3xy) + 3x(1 + xy)^2 z \end{aligned}$$

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = (1 + xy)^3$$

偏微分: v

$$v = y + 3x(1 + xy)^2z + 3xy^2(4 + 3xy)$$

より、 v の偏微分は

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial v}{\partial x} = 3(1 + xy)^2z + 6xy(1 + xy)z + 3y^2(4 + 3xy) + 9xy^3 \\ &= 9xy^3 + 3y^2(4 + 3xy) + 6xy(1 + xy)z + 3(1 + xy)^2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 6x^2(1 + xy)z + 6xy(4 + 3xy) + 9x^2y^2 \\ &= 1 + 9x^2y^2 + 6xy(4 + 3xy) + 6x^2(1 + xy)z \end{aligned}$$

$$v_z = \frac{\partial v}{\partial z} = 3x(1 + xy)^2$$

偏微分: w

$$w = 2x - 3x^2y - x^3z$$

より、 w の偏微分は

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 2 - 6xy - 3x^2z$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = -3x^2$$

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -x^3$$

行列式

ヤコビアンの行列式を余因子展開すると

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

となる。そこで、余因子

$$\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

を計算する。

余因子1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} &= v_y w_z - v_z w_y \\ &= \{1 + 9x^2 y^2 + 6xy(4 + 3xy) + 6x^2(1 + xy)z\} \cdot (-x^3) \\ &\quad - 3x(1 + xy)^2 \cdot (-3x^2) \\ &= -x^3 - 9x^5 y^2 - 6x^4 y(4 + 3xy) - 6x^5(1 + xy)z + 9x^3(1 + xy)^2 \\ &= -x^3 - 9x^5 y^2 + 9x^3(1 + xy)^2 - 6x^4 y(4 + 3xy) - 6x^5(1 + xy)z \end{aligned}$$

余因子2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} &= v_z w_x - v_x w_z \\ &= 3x(1+xy)^2 \cdot (2-6xy-3x^2z) \\ &\quad - \{9xy^3 + 3y^2(4+3xy) + 6xy(1+xy)z + 3(1+xy)^2z\} \cdot (-x^3) \\ &= 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 - 9x^3(1+xy)^2z \\ &\quad + 9x^4y^3 + 3x^3y^2(4+3xy) + 6x^4y(1+xy)z + 3x^3(1+xy)^2z \\ &= 9x^4y^3 + 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 + 3x^3y^2(4+3xy) \\ &\quad + 6x^4y(1+xy)z - 9x^3(1+xy)^2z + 3x^3(1+xy)^2z \\ &= 9x^4y^3 + 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 + 3x^3y^2(4+3xy) \\ &\quad + 6x^4y(1+xy)z - 6x^3(1+xy)^2z \end{aligned}$$

余因子3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} &= v_x w_y - v_y w_x \\ &= \{9xy^3 + 3y^2(4 + 3xy) + 6xy(1 + xy)z + 3(1 + xy)^2 z\} \cdot (-3x^2) \\ &\quad - \{1 + 9x^2 y^2 + 6xy(4 + 3xy) + 6x^2(1 + xy)z\} \cdot (2 - 6xy - 3x^2 z) \\ &= -27x^3 y^3 - 9x^2 y^2(4 + 3xy) - 18x^3 y(1 + xy)z - 9x^2(1 + xy)^2 z \\ &\quad - 2 - 18x^2 y^2 - 12xy(4 + 3xy) - 12x^2(1 + xy)z \\ &\quad + 6xy + 54x^3 y^3 + 36x^2 y^2(4 + 3xy) + 36x^3 y(1 + xy)z \\ &\quad + 3x^2 z + 27x^4 y^2 z + 18x^3 y(4 + 3xy)z + 18x^4(1 + xy)z^2 \end{aligned}$$

余因子3

$$\begin{aligned} &= -2 + 6xy - 18x^2y^2 - 27x^3y^3 + 54x^3y^3 \\ &\quad - 12xy(4 + 3xy) - 9x^2y^2(4 + 3xy) + 36x^2y^2(4 + 3xy) \\ &\quad + 3x^2z + 27x^4y^2z - 12x^2(1 + xy)z \\ &\quad - 18x^3y(1 + xy)z + 36x^3y(1 + xy)z - 9x^2(1 + xy)^2z \\ &\quad + 18x^3y(4 + 3xy)z + 18x^4(1 + xy)z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2 + 6xy - 18x^2y^2 + 27x^3y^3 \\ &\quad - 12xy(4 + 3xy) + 27x^2y^2(4 + 3xy) \\ &\quad + 3x^2z + 27x^4y^2z - 12x^2(1 + xy)z \\ &\quad + 18x^3y(1 + xy)z - 9x^2(1 + xy)^2z \\ &\quad + 18x^3y(4 + 3xy)z + 18x^4(1 + xy)z^2 \end{aligned}$$

余因子展開1

続いて、

$$u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}, \quad u_y \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix}, \quad u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

を計算する。

$$\begin{aligned} u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} &= \{3y^3(1+xy) + y^3(4+3xy) + 3y(1+xy)^2z\} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= 3y^3(1+xy) \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + y^3(4+3xy) \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + 3y(1+xy)^2z \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= 3y^3(1+xy) \cdot \{-x^3 - 9x^5y^2 + 9x^3(1+xy)^2 - 6x^4y(4+3xy) - 6x^5(1+xy)z\} \\ &\quad + y^3(4+3xy) \\ &\quad \cdot \{-x^3 - 9x^5y^2 + 9x^3(1+xy)^2 - 6x^4y(4+3xy) - 6x^5(1+xy)z\} \\ &\quad + 3y(1+xy)^2z \\ &\quad \cdot \{-x^3 - 9x^5y^2 + 9x^3(1+xy)^2 - 6x^4y(4+3xy) - 6x^5(1+xy)z\} \end{aligned}$$

余因子展開1

$$\begin{aligned} &= -3x^3y^3(1+xy) - 27x^5y^5(1+xy) + 27x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad - 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) - 18x^5y^3(1+xy)^2z \\ &\quad - x^3y^3(4+3xy) - 9x^5y^5(4+3xy) + 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 6x^4y^4(4+3xy)^2 - 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad - 3x^3y(1+xy)^2z - 27x^5y^3(1+xy)^2z + 27x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 18x^5y(1+xy)^3z^2 \\ &= -3x^3y^3(1+xy) - 27x^5y^5(1+xy) + 27x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad - 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) - x^3y^3(4+3xy) - 9x^5y^5(4+3xy) \\ &\quad + 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) - 6x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad - 18x^5y^3(1+xy)^2z - 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z - 3x^3y(1+xy)^2z \\ &\quad - 27x^5y^3(1+xy)^2z + 27x^3y(1+xy)^4z - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad - 18x^5y(1+xy)^3z^2 \end{aligned}$$

余因子展開1

$$\begin{aligned} &= -3x^3y^3(1+xy) - 27x^5y^5(1+xy) + 27x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad - x^3y^3(4+3xy) - 9x^5y^5(4+3xy) - 6x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad - 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 3x^3y(1+xy)^2z - 18x^5y^3(1+xy)^2z - 27x^5y^3(1+xy)^2z \\ &\quad + 27x^3y(1+xy)^4z - 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 18x^5y(1+xy)^3z^2 \\ &= -3x^3y^3(1+xy) - 27x^5y^5(1+xy) + 27x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad - x^3y^3(4+3xy) - 9x^5y^5(4+3xy) - 6x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad - 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 3x^3y(1+xy)^2z - 45x^5y^3(1+xy)^2z \\ &\quad + 27x^3y(1+xy)^4z - 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 18x^5y(1+xy)^3z^2 \end{aligned}$$

余因子展開2

$$\begin{aligned} & u_y \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} \\ &= \{3xy^2(1+xy) + xy^2(4+3xy) + 2y(1+xy)(4+3xy) + 3x(1+xy)^2z\} \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} \\ &= 3xy^2(1+xy) \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} + xy^2(4+3xy) \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} \\ &\quad + 2y(1+xy)(4+3xy) \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} + 3x(1+xy)^2z \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

余因子展開2

$$\begin{aligned} &= 3xy^2(1+xy) \\ &\quad \cdot \{9x^4y^3 + 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 + 3x^3y^2(4+3xy) \\ &\quad \quad + 6x^4y(1+xy)z - 6x^3(1+xy)^2z\} \\ &+ xy^2(4+3xy) \\ &\quad \cdot \{9x^4y^3 + 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 + 3x^3y^2(4+3xy) \\ &\quad \quad + 6x^4y(1+xy)z - 6x^3(1+xy)^2z\} \\ &+ 2y(1+xy)(4+3xy) \\ &\quad \cdot \{9x^4y^3 + 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 + 3x^3y^2(4+3xy) \\ &\quad \quad + 6x^4y(1+xy)z - 6x^3(1+xy)^2z\} \\ &+ 3x(1+xy)^2z \\ &\quad \cdot \{9x^4y^3 + 6x(1+xy)^2 - 18x^2y(1+xy)^2 + 3x^3y^2(4+3xy) \\ &\quad \quad + 6x^4y(1+xy)z - 6x^3(1+xy)^2z\} \end{aligned}$$

余因子展開2

$$\begin{aligned} &= 27x^5y^5(1+xy) + 18x^2y^2(1+xy)^3 - 54x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 18x^5y^3(1+xy)^2z - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ &\quad + 9x^5y^5(4+3xy) + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) - 18x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad + 3x^4y^4(4+3xy)^2 + 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z - 6x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad + 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 12xy(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad - 36x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 \\ &\quad + 12x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 27x^5y^3(1+xy)^2z + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad + 9x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z + 18x^5y(1+xy)^3z^2 - 18x^4(1+xy)^4z^2 \end{aligned}$$

余因子展開2

$$\begin{aligned} &= 27x^5y^5(1+xy) + 18x^2y^2(1+xy)^3 - 54x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 9x^5y^5(4+3xy) + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 18x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) + 3x^4y^4(4+3xy)^2 + 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) \\ &\quad + 12xy(1+xy)^3(4+3xy) - 36x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 \\ &\quad + 18x^5y^3(1+xy)^2z - 18x^4y^2(1+xy)^3z + 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad - 6x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z + 12x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z + 27x^5y^3(1+xy)^2z + 18x^2(1+xy)^4z \\ &\quad - 54x^3y(1+xy)^4z + 9x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad + 18x^5y(1+xy)^3z^2 - 18x^4(1+xy)^4z^2 \end{aligned}$$

余因子展開2

$$\begin{aligned} &= 27x^5y^5(1+xy) + 18x^2y^2(1+xy)^3 - 54x^3y^3(1+xy)^3 + 9x^5y^5(4+3xy) \\ &\quad + 3x^4y^4(4+3xy)^2 + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 18x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) + 12xy(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad - 36x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad + 18x^5y^3(1+xy)^2z + 27x^5y^3(1+xy)^2z - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ &\quad + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z + 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad - 6x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z + 12x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad + 9x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 18x^5y(1+xy)^3z^2 - 18x^4(1+xy)^4z^2 \end{aligned}$$

余因子展開2

$$\begin{aligned} &= 27x^5y^5(1+xy) + 18x^2y^2(1+xy)^3 - 54x^3y^3(1+xy)^3 + 9x^5y^5(4+3xy) \\ &\quad + 3x^4y^4(4+3xy)^2 + 27x^4y^4(1+xy)(4+3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 18x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) + 12xy(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad - 36x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad + 45x^5y^3(1+xy)^2z - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ &\quad + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z + 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad + 15x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 18x^5y(1+xy)^3z^2 - 18x^4(1+xy)^4z^2 \end{aligned}$$

余因子展開3

$$\begin{aligned} u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} &= (1 + xy)^3 \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \\ &= (1 + xy)^3 \cdot \{-2 + 6xy - 18x^2y^2 + 27x^3y^3 - 12xy(4 + 3xy) + 27x^2y^2(4 + 3xy) \\ &\quad + 3x^2z + 27x^4y^2z - 12x^2(1 + xy)z + 18x^3y(1 + xy)z \\ &\quad - 9x^2(1 + xy)^2z + 18x^3y(4 + 3xy)z + 18x^4(1 + xy)z^2\} \\ &= -2(1 + xy)^3 + 6xy(1 + xy)^3 - 18x^2y^2(1 + xy)^3 \\ &\quad + 27x^3y^3(1 + xy)^3 - 12xy(1 + xy)^3(4 + 3xy) + 27x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \\ &\quad + 3x^2(1 + xy)^3z + 27x^4y^2(1 + xy)^3z - 12x^2(1 + xy)^4z + 18x^3y(1 + xy)^4z \\ &\quad - 9x^2(1 + xy)^5z + 18x^3y(1 + xy)^3(4 + 3xy)z + 18x^4(1 + xy)^4z^2 \end{aligned}$$

行列式の計算

以上より、ヤコビアンは

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \\ &= -3x^3y^3(1+xy) - 27x^5y^5(1+xy) + 27x^3y^3(1+xy)^3 \\ &\quad - x^3y^3(4+3xy) - 9x^5y^5(4+3xy) - 6x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad - 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 3x^3y(1+xy)^2z - 45x^5y^3(1+xy)^2z \\ &\quad + 27x^3y(1+xy)^4z - 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 18x^5y(1+xy)^3z^2 \\ &\quad + 27x^5y^5(1+xy) + 18x^2y^2(1+xy)^3 - 54x^3y^3(1+xy)^3 + 9x^5y^5(4+3xy) \\ &\quad + 3x^4y^4(4+3xy)^2 + 27x^4y^4(1+xy)(4+3xy) \end{aligned}$$

行列式の計算

$$\begin{aligned} & + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ & - 18x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) + 12xy(1+xy)^3(4+3xy) \\ & - 36x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ & + 45x^5y^3(1+xy)^2z - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ & + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z + 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ & + 15x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ & + 18x^5y(1+xy)^3z^2 - 18x^4(1+xy)^4z^2 \\ & - 2(1+xy)^3 + 6xy(1+xy)^3 - 18x^2y^2(1+xy)^3 \\ & + 27x^3y^3(1+xy)^3 - 12xy(1+xy)^3(4+3xy) + 27x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ & + 3x^2(1+xy)^3z + 27x^4y^2(1+xy)^3z - 12x^2(1+xy)^4z + 18x^3y(1+xy)^4z \\ & - 9x^2(1+xy)^5z + 18x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z + 18x^4(1+xy)^4z^2 \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含まない項)

$$\begin{aligned} J_{xy} = & -3x^3y^3(1+xy) - 27x^5y^5(1+xy) + 27x^3y^3(1+xy)^3 \\ & - x^3y^3(4+3xy) - 9x^5y^5(4+3xy) - 6x^4y^4(4+3xy)^2 \\ & - 18x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ & + 27x^5y^5(1+xy) + 18x^2y^2(1+xy)^3 - 54x^3y^3(1+xy)^3 + 9x^5y^5(4+3xy) \\ & + 3x^4y^4(4+3xy)^2 + 27x^4y^4(1+xy)(4+3xy) \\ & + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ & - 18x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) + 12xy(1+xy)^3(4+3xy) \\ & - 36x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ & - 2(1+xy)^3 + 6xy(1+xy)^3 - 18x^2y^2(1+xy)^3 \\ & + 27x^3y^3(1+xy)^3 - 12xy(1+xy)^3(4+3xy) + 27x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含まない項)

$$\begin{aligned} &= -3x^3y^3(1 + xy) \\ &\quad - x^3y^3(4 + 3xy) - 6x^4y^4(4 + 3xy)^2 \\ &\quad - 18x^4y^4(1 + xy)(4 + 3xy) + 9x^3y^3(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad + 3x^4y^4(4 + 3xy)^2 + 27x^4y^4(1 + xy)(4 + 3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1 + xy)(4 + 3xy)^2 + 6x^2y^2(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad - 18x^3y^3(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad - 36x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \\ &\quad - 2(1 + xy)^3 + 6xy(1 + xy)^3 \\ &\quad + 27x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含まない項)

$$\begin{aligned} &= -3x^3y^3(1 + xy) \\ &\quad - x^3y^3(4 + 3xy) - 6x^4y^4(4 + 3xy)^2 \\ &\quad - 18x^4y^4(1 + xy)(4 + 3xy) + 9x^3y^3(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad + 3x^4y^4(4 + 3xy)^2 + 27x^4y^4(1 + xy)(4 + 3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1 + xy)(4 + 3xy)^2 + 6x^2y^2(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad - 18x^3y^3(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad - 36x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \\ &\quad - 2(1 + xy)^3 + 6xy(1 + xy)^3 \\ &\quad + 27x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含まない項)

$$\begin{aligned} &= -3x^3y^3(1 + xy) \\ &\quad - x^3y^3(4 + 3xy) - 3x^4y^4(4 + 3xy)^2 \\ &\quad + 9x^4y^4(1 + xy)(4 + 3xy) - 9x^3y^3(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1 + xy)(4 + 3xy)^2 + 6x^2y^2(1 + xy)^2(4 + 3xy) \\ &\quad - 9x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \\ &\quad - 2(1 + xy)^3 + 6xy(1 + xy)^3 \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含む項)

$$\begin{aligned} J_{xyz} = & -3x^3y(1+xy)^2z - 45x^5y^3(1+xy)^2z \\ & + 27x^3y(1+xy)^4z - 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ & - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 18x^5y(1+xy)^3z^2 \\ & + 45x^5y^3(1+xy)^2z - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ & + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z + 6x^5y^3(1+xy)(4+3xy)z \\ & + 15x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ & + 18x^5y(1+xy)^3z^2 - 18x^4(1+xy)^4z^2 \\ & + 3x^2(1+xy)^3z + 27x^4y^2(1+xy)^3z - 12x^2(1+xy)^4z + 18x^3y(1+xy)^4z \\ & - 9x^2(1+xy)^5z + 18x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z + 18x^4(1+xy)^4z^2 \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含む項)

$$\begin{aligned} &= -3x^3y(1+xy)^2z \\ &\quad + 27x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ &\quad + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad + 15x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 3x^2(1+xy)^3z + 27x^4y^2(1+xy)^3z - 12x^2(1+xy)^4z + 18x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad - 9x^2(1+xy)^5z + 18x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含む項)

$$\begin{aligned} &= -3x^3y(1+xy)^2z \\ &\quad + 27x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad - 18x^4y^2(1+xy)^3z \\ &\quad + 18x^2(1+xy)^4z - 54x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad + 15x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z - 12x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 3x^2(1+xy)^3z + 27x^4y^2(1+xy)^3z - 12x^2(1+xy)^4z + 18x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad - 9x^2(1+xy)^5z + 18x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \end{aligned}$$

行列式の計算 (z を含む項)

$$\begin{aligned} &= -3x^3y(1+xy)^2z \\ &\quad - 9x^3y(1+xy)^4z \\ &\quad - 3x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad + 9x^4y^2(1+xy)^3z \\ &\quad + 6x^2(1+xy)^4z \\ &\quad + 6x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 3x^2(1+xy)^3z \\ &\quad - 9x^2(1+xy)^5z \end{aligned}$$

行列式の計算

$$\begin{aligned} J &= J_{xy} + J_{xyz} \\ &= -3x^3y^3(1+xy) - x^3y^3(4+3xy) - 3x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) - 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 9x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) - 2(1+xy)^3 + 6xy(1+xy)^3 \\ &\quad - 3x^3y(1+xy)^2z - 9x^3y(1+xy)^4z - 3x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z \\ &\quad + 9x^4y^2(1+xy)^3z + 6x^2(1+xy)^4z + 6x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \\ &\quad + 3x^2(1+xy)^3z - 9x^2(1+xy)^5z \end{aligned}$$

行列式の計算

$$\begin{aligned} &= -2(1+xy)^3 - 3x^3y^3(1+xy) - x^3y^3(4+3xy) - 3x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad - 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) - 9x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad + 6xy(1+xy)^3 + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 \\ &\quad + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad - 3x^3y(1+xy)^2z + 3x^2(1+xy)^3z + 9x^4y^2(1+xy)^3z + 6x^2(1+xy)^4z \\ &\quad - 9x^3y(1+xy)^4z - 9x^2(1+xy)^5z \\ &\quad - 3x^4y^2(1+xy)^2(4+3xy)z + 6x^3y(1+xy)^3(4+3xy)z \end{aligned}$$

行列式の計算

$$\begin{aligned} &= -2(1+xy)^3 - 3x^3y^3(1+xy) - x^3y^3(4+3xy) - 3x^4y^4(4+3xy)^2 \\ &\quad - 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) - 9x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\ &\quad + 6xy(1+xy)^3 + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 \\ &\quad + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &\quad + 3x^2y(1+xy)^2z \\ &\quad \cdot \{-xy + (1+xy) + 3x^2y^2(1+xy) + 2(1+xy)^2 - 3xy(1+xy)^2 \\ &\quad - 3(1+xy)^3 - x^2y^2(4+3xy) + 2xy(1+xy)(4+3xy)\} \end{aligned}$$

行列式の計算

$$\begin{aligned}
 &= -2(1+xy)^3 - 3x^3y^3(1+xy) - x^3y^3(4+3xy) - 3x^4y^4(4+3xy)^2 \left. \vphantom{-2(1+xy)^3} \right\} J_- \\
 &\quad - 9x^3y^3(1+xy)^2(4+3xy) - 9x^2y^2(1+xy)^3(4+3xy) \\
 &\quad + 6xy(1+xy)^3 + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 \left. \vphantom{+6xy(1+xy)^3} \right\} J_+ \\
 &\quad + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\
 &\quad + 3x^2y(1+xy)^2z \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 + 3x^2y^2(1+xy) + 2(1+xy)^2 - 3xy(1+xy)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 3(1+xy)^3 - x^2y^2(4+3xy) + 2xy(1+xy)(4+3xy) \right\} J_0
 \end{aligned}$$

行列式の計算1

$t = xy$ とおくと

$$\begin{aligned} J_- &= -2(1 + xy)^3 - 3x^3y^3(1 + xy) - x^3y^3(4 + 3xy) - 3x^4y^4(4 + 3xy)^2 \\ &\quad - 9x^3y^3(1 + xy)^2(4 + 3xy) - 9x^2y^2(1 + xy)^3(4 + 3xy) \\ &= -2(1 + t)^3 - 3t^3(1 + t) - t^3(4 + 3t) - 3t^4(4 + 3t)^2 \\ &\quad - 9t^3(1 + t)^2(4 + 3t) - 9t^2(1 + t)^3(4 + 3t) \\ &= -2(1 + 3t + 3t^2 + t^3) - 3t^3(1 + t) - t^3(4 + 3t) - 3t^4(16 + 24t + 9t^2) \\ &\quad - 9t^2(1 + t)^2(4 + 3t)\{t + (1 + t)\} \\ &= -2 - (6t + 6t^2 + 2t^3) - (3t^3 + 3t^4) - (4t^3 + 3t^4) - 3t^4(16 + 24t + 9t^2) \\ &\quad - 9t^2(1 + t)^2(4 + 3t)(1 + 2t) \\ &= -2 - (6t + 6t^2 + 9t^3 + 6t^4) - 3t^4(16 + 24t + 9t^2) \\ &\quad - 9t^2(1 + t)^2(4 + 11t + 6t^2) \end{aligned}$$

行列式の計算1

$$\begin{aligned} &= -2 - 3t(2 + 2t + 3t^2 + 2t^3) - 3t(16t^3 + 24t^4 + 9t^5) \\ &\quad - 9t^2(1 + t)(1 + t)(4 + 11t + 6t^2) \\ &= -2 - 3t(2 + 2t + 3t^2 + 18t^3 + 24t^4 + 9t^5) \\ &\quad - 9t^2(1 + t)(4 + 11t + 6t^2 + 4t + 11t^2 + 6t^3) \\ &= -2 - 3t(1 + t)(2 + 3t^2 + 15t^3 + 9t^4) \\ &\quad - 9t^2(1 + t)(4 + 15t + 17t^2 + 6t^3) \\ &= -2 - 3t(1 + t)(2 + 3t^2 + 15t^3 + 9t^4) \\ &\quad - 3t(1 + t)(12t + 45t^2 + 51t^3 + 18t^3) \\ &= -2 - 3t(1 + t)(2 + 12t + 48t^2 + 66t^3 + 27t^4) \end{aligned}$$

行列式の計算2

$t = xy$ とおくと

$$\begin{aligned} J_+ &= 6xy(1+xy)^3 + 9x^4y^4(1+xy)(4+3xy) + 6x^3y^3(1+xy)(4+3xy)^2 \\ &\quad + 6x^2y^2(1+xy)^2(4+3xy) \\ &= 6t(1+t)^3 + 9t^4(1+t)(4+3t) + 6t^3(1+t)(4+3t)^2 \\ &\quad + 6t^2(1+t)^2(4+3t) \\ &= 3t(1+t)\{2(1+t)^2 + 3t^3(4+3t) + 2t^2(4+3t)^2 + 2t(1+t)(4+3t)\} \\ &= 3t(1+t)\{2(1+t)^2 + 2t(1+t)(4+3t) + 3t^3(4+3t) + 2t^2(4+3t)^2\} \\ &= 3t(1+t)\{2(1+t)((1+t) + t(4+3t)) + t^2(4+3t)(3t + 2(4+3t))\} \\ &= 3t(1+t)\{2(1+t)(1+5t+3t^2) + t^2(4+3t)(8+9t)\} \\ &= 3t(1+t)\{2(1+5t+3t^2+t+5t^2+3t^3) + t^2(32+60t+27t^2)\} \\ &= 3t(1+t)(2+12t+48t^2+66t^3+27t^4) \end{aligned}$$

行列式の計算3

$t = xy$ とおくと

$$\begin{aligned} J_0 &= 1 + 3x^2y^2(1 + xy) + 2(1 + xy)^2 - 3xy(1 + xy)^2 \\ &\quad - 3(1 + xy)^3 - x^2y^2(4 + 3xy) + 2xy(1 + xy)(4 + 3xy) \\ &= 1 + 3t^2(1 + t) + 2(1 + t)^2 - 3t(1 + t)^2 \\ &\quad - 3(1 + t)^3 - t^2(4 + 3t) + 2t(1 + t)(4 + 3t) \\ &= 1 + 3t^2(1 + t) - t^2(4 + 3t) + 2(1 + t)^2 - 3(1 + t)^3 \\ &\quad + 2t(1 + t)(4 + 3t) - 3t(1 + t)^2 \\ &= 1 + t^2\{3(1 + t) - (4 + 3t)\} + (1 + t)^2\{2 - 3(1 + t)\} \\ &\quad + t(1 + t)\{2(4 + 3t) - 3(1 + t)\} \\ &= 1 - t^2 - (1 + t)^2(1 + 3t) + t(1 + t)(5 + 3t) \\ &= (1 + t)\{(1 - t) - (1 + t)(1 + 3t) + t(5 + 3t)\} = 0 \end{aligned}$$

行列式の計算

したがって

$$\begin{aligned} J &= J_- + J_+ + 3x^2y(1+xy)^2z \cdot J_0 \\ &= -2 - 3t(1+t)(2+12t+48t^2+66t^3+27t^4) \\ &\quad + 3t(1+t)(2+12t+48t^2+66t^3+27t^4) \\ &\quad + 3x^2y(1+xy)^2z \cdot 0 \\ &= -2 \end{aligned}$$

答

$$u = (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy)$$

$$v = y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy)$$

$$w = 2x - 3x^2 y - x^3 z$$

のヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = -2$$

である。

参考文献

https://x.com/__alpoge__/status/2079028340955197566