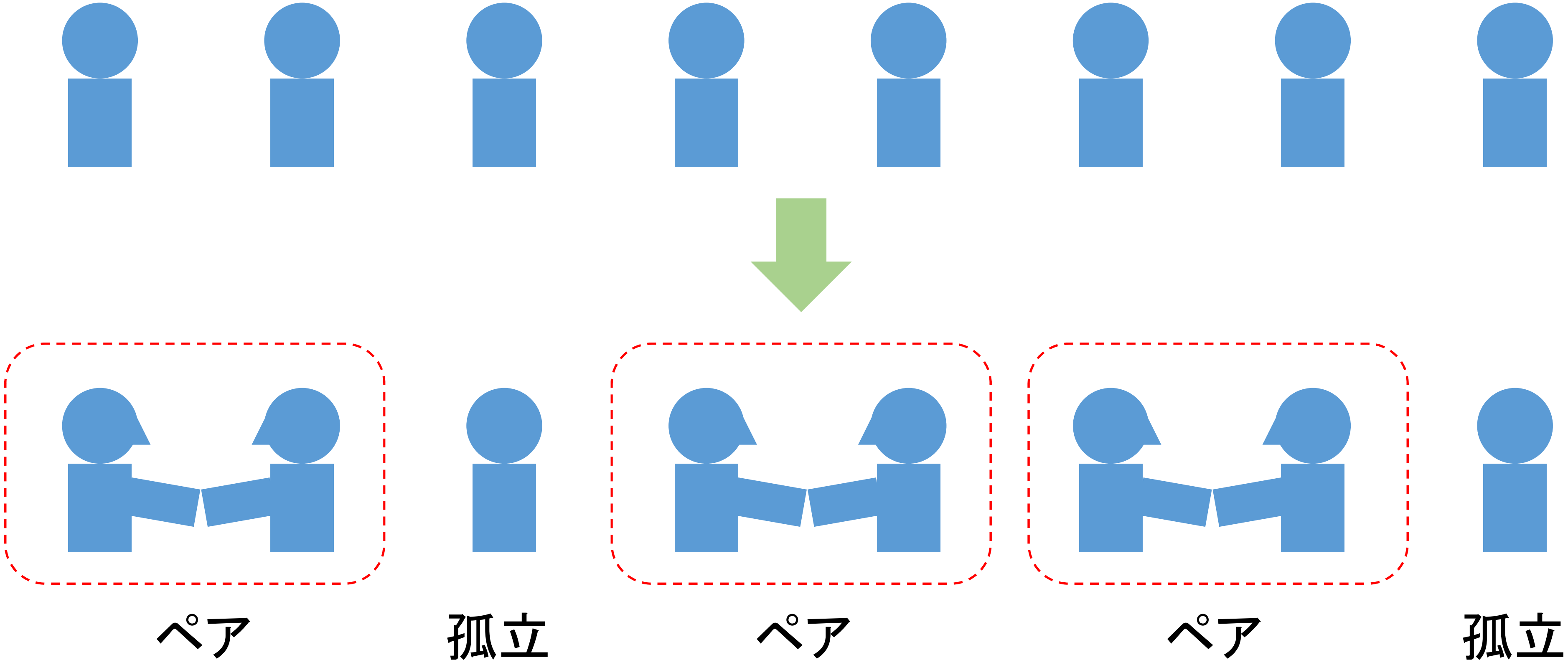
1次元のペア形成
ー孤立の比率ー

渡邉 俊夫

問題

1列に並んだ n 人がランダムに隣の人とペアを作るとき、ペアを作れずに孤立してしまう人の割合はいくらか。



ペアの作り方

「ランダムに隣の人とペアを作る」とは、次のような意味とする。

1. ペアを作ることができるのは、隣どうしのみである。すなわち、ペアを作る箇所は $n-1$ 組ある。
2. 初めに $n-1$ 組のうちからランダムに選んだ1組でペアを作る。
3. 以下、残りの組のうちからランダムに1組を選んでペアを作っていく。ただし、選んだ組の2人の一方または両方が既に（逆側の人と）ペアを作っている場合には、そこではペアは作れない。次の組の選択に移る。

孤立する人数 a_n : n が少数の場合の値

n 人のうち、ペアを作れずに孤立してしまう人数（の統計的な）期待値を a_n とする。

$n = 1$ のとき、（ペアを作りようがないから）$a_1 = 1$ である。

$n = 2$ のとき、（2人で1つのペアができるから）$a_2 = 0$ である。

$n = 3$ のとき、（どちらかの端の1人が必ず余るから）$a_3 = 1$ である。

$n = 4$ のとき、（最初のペアの選び方は3通りで、そのうち2通りでは全員ペアになり、1通りでは両端の2人が余るから）$a_4 = 2/3$ である。

・・・

孤立する人数 a_n : 定式化

$n \geq 3$ のとき、初めに j 番目と $j+1$ 番目がペアになったとすると、その両側に $j-1$ 人と $n-(j+1)$ 人がいるから、最終的に孤立するのは $a_{j-1}+a_{n-(j+1)}$ 人である。

そして、最初のペアは $j=1$ から $j=n-1$ のうちの1箇所でランダムに作られるから

$$a_n = \frac{(0+a_{n-2})+(a_1+a_{n-3})+(a_2+a_{n-4})+\cdots(a_{n-2}+0)}{n-1}$$

$$= \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} a_k$$

となる。

階差数列 b_n

a_n の一般項を求めるために、a_n の階差数列 $b_n = a_n - a_{n-1}$ を作ると

$$b_{n+1} = a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_k - \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} a_k$$

$$= \frac{2}{n}a_{n-1} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-2} a_k - \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} a_k$$

$$= \frac{2}{n}a_{n-1} - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-2} a_k = \frac{2}{n}a_{n-1} - \frac{1}{n}a_n$$

$$\therefore nb_{n+1} = -a_n + 2a_{n-1}$$

階差数列 b_n の階差数列：漸化式

a_n の階差数列 $b_n = a_n - a_{n-1}$ について

$$nb_{n+1} = -a_n + 2a_{n-1}$$

が成り立つ。これより

$$(n-1)b_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

も成り立つから、両式を辺々引くと

$$n(b_{n+1} - b_n) + b_n = -(a_n - a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - a_{n-2})$$

$$= -b_n + 2b_{n-1}$$

$$n(b_{n+1} - b_n) = -2b_n + 2b_{n-1} = -2(b_n - b_{n-1})$$

$$\therefore\ b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{n}(b_n - b_{n-1})$$

階差数列 b_n の階差数列：漸化式の計算

a_n の階差数列 $b_n = a_n - a_{n-1}$ について

$$b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{n}(b_n - b_{n-1})$$

だから

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= -\frac{2}{n-1}(b_{n-1} - b_{n-2}) \\ &= \frac{-2}{n-1} \cdot \frac{-2}{n-2}(b_{n-2} - b_{n-3}) \\ &\cdots \\ &= \frac{(-2)^{n-3}}{(n-1)(n-2)\cdots 3}(b_3 - b_2) \end{aligned}$$

階差数列 b_n の階差数列：一般項

a_n の階差数列 $b_n = a_n - a_{n-1}$ について

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(-2)^{n-3}}{(n-1)(n-2)\cdots 3}(b_3 - b_2)$$

であり、$b_3 = a_3 - a_2 = 1 - 0 = 1,\, b_2 = a_2 - a_1 = 0 - 1 = -1$ だから

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(-2)^{n-3}}{(n-1)(n-2)\cdots 3}(1+1)$$

$$= \frac{(-2)^{n-3}}{(n-1)(n-2)\cdots 3}\cdot 2 = \frac{(-2)^{n-3}\cdot 2^2}{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2}$$

$$= \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

階差数列 b_n : 漸化式

a_n の階差数列 $b_n = a_n - a_{n-1}$ について

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

より

$$b_n = b_{n-1} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} = b_{n-2} + \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \cdots$$

$$= b_2 + \frac{(-2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!}$$

階差数列 b_n : 一般項

a_n の階差数列 $b_n = a_n - a_{n-1}$ について

$$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!}$$

ここで、$b_2 = a_2 - a_1 = 0 - 1 = -1$ だから

$$b_n = -1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!} = 1 - 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!}$$

となる。

孤立する人数 a_n：漸化式

$$b_n = a_n - a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!} = 1 - 2 + \cdots + \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

であるから

$$b_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = 1 - 2 + \cdots + \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$\cdots$$

$$b_2 = a_2 - a_1 = 1 - 2$$

これらをすべて足し合わせると

$$a_n - a_1 = (n-1) + (n-1)(-2) + \cdots + 2 \cdot \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

孤立する人数 a_n：一般項

$$a_n - a_1 = (n-1) + (n-1)(-2) + \cdots + 2 \cdot \frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{(-2)^k}{k!}$$

であるから、$a_1 = 1$ より

$$a_n = a_1 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{(-2)^k}{k!}$$

$$= 1 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{(-2)^k}{k!} = n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{(-2)^k}{k!}$$

孤立する人数 a_n : 一般項

$$a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{(-2)^k}{k!} = n + n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1}k\frac{(-2)^k}{k!}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!} - (-2)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!} = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-2)^k}{k!}$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!} - 2\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= (n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{k!} + \frac{(-2)^n}{(n-1)!}$$

孤立する人数の割合

以上より、n 人のうち孤立する人数 a_n は

$$a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{(-2)^k}{k!} = (n+2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!} + \frac{(-2)^n}{(n-1)!}$$

である。したがって、その割合は

$$\frac{a_n}{n} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2)^k}{k!} + \frac{(-2)^n}{n!}$$

であり、$n \to \infty$ のとき

$$\frac{a_n}{n} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = 13.5\ \%$$

参考文献
高分子学会 編
「高分子科学の基礎」
東京化学同人、1978
p. 330、第6章 問題1