コンマの差
－音律の数学－

渡邉 俊夫

音の高さ

音の高さは、音波の周波数で決まる。

2 つの音の周波数の比が $2^n:1$（n は整数）になる場合、その 2 つの音は同じ種類の音として認識される。

基音（基準となる音）に対して周波数が 2 倍の音を 1 オクターブ高い音という。基音から順に周波数を 2 倍にしていくと、1 オクターブずつ高い音になる。また、基音から順に周波数を $\frac{1}{2}$ にしていくと、1 オクターブずつ低い音になる。

ある音に対して周波数が 2^n 倍の音（オクターブの関係にある音）に、その音と同じ音名を付ける。

ピタゴラス音律

2 つの音の周波数の比が簡単な整数比になる場合、その 2 つの音を同時に鳴らすと調和した心地よい響きになるとされている。

基音から順に周波数を $\frac{3}{2}$ 倍にしていくと、

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}} = \frac{531441}{4096} = 129.746$$

となることから

$$\frac{3^{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{2^{7}} = \frac{531441}{4096} \cdot \frac{1}{128} = \frac{129.746}{128} = 1.013643$$

より、12 番目の音は基音の 7 オクターブ上よりわずかに高い音になる。
このようにして得られた音の配列を**ピタゴラス音律**という。

ピタゴラス音律

基音($n = 0$)に対する周波数比が $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ の音を、$n = -6$ から $n = 6$ まで示すと、次ページの表のようになる。
ここで、各音のオクターブを調整して、基音の周波数 f_0 に対する比が $1 \leq f/f_0 < 2$ の範囲となるようにしている。
この表には、基音が C の場合の音名も示している。
ここで、$n = 6$ と $n = -6$ はいずれも F と G の間の音になるが、$n = 6$ の音の方が高いので、$n = 6$ を G♭、$n = -6$ を F♯ としている。
それに合わせて、$n = -2$ から $n = -5$ の音を、それぞれ A♯、D♯、G♯、C♯としている(この表記では、$n = 7$ から $n = 10$ の音が、それぞれ D♭、A♭、E♭、B♭となる)。

n	$(3/2)^n$	f/f_0	音名
0	$\frac{3^0}{2^0}=\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}=1.000000$	C
-1	$\frac{2^1}{3^1}=\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}=1.333333$	F
-2	$\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$	$\frac{16}{9}=1.777778$	A♯
-3	$\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$	$\frac{32}{27}=1.185185$	D♯
-4	$\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$	$\frac{128}{81}=1.580247$	G♯
-5	$\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}$	$\frac{256}{243}=1.053498$	C♯
-6	$\frac{2^6}{3^6}=\frac{64}{729}$	$\frac{1024}{729}=1.404664$	F♯

n	$(3/2)^n$	f/f_0	音名
6	$\frac{3^6}{2^6}=\frac{729}{64}$	$\frac{729}{512}=1.423828$	G♭
5	$\frac{3^5}{2^5}=\frac{243}{32}$	$\frac{243}{128}=1.898438$	B
4	$\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$	$\frac{81}{64}=1.265625$	E
3	$\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8}$	$\frac{27}{16}=1.687500$	A
2	$\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$	$\frac{9}{8}=1.125000$	D
1	$\frac{3^1}{2^1}=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}=1.500000$	G
0	$\frac{3^0}{2^0}=\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}=1.000000$	C

ピタゴラス音律

前ページの表を f/f_0 の順に並べ替えて、基音の 1 オクターブ上の C を付け加えると、次ページの表が得られる。ここで、音程 P は

$$P = 1200 \log_2 \frac{f}{f_0}$$

により、セント単位で表しており、1 オクターブが 1200 cent である。
次ページの表で、隣り合う音を半音という（ただし、G♭とF♯の間は除く）。また、1 つおきの音を全音という（ただし、G♭とF♯は、どちらかを取るものとする）。

音名	n	f/f_0	P [cent]]	ΔP
F♯	-6	$\frac{1024}{729}=1.404664$	588.270	90.225
F	-1	$\frac{4}{3}=1.333333$	498.045	90.225
E	4	$\frac{81}{64}=1.265625$	407.820	113.685
D♯	-3	$\frac{32}{27}=1.185185$	294.135	90.225
D	2	$\frac{9}{8}=1.125000$	203.910	113.685
C♯	-5	$\frac{256}{243}=1.053498$	90.225	90.225
C	0	$\frac{1}{1}=1.000000$	0.000	

音名	n	f/f_0	P [cent]]	ΔP
C	0	$\frac{2}{1}=2.000000$	1200.000	90.225
B	5	$\frac{243}{128}=1.898438$	1109.775	113.685
A♯	-2	$\frac{16}{9}=1.777778$	996.090	90.225
A	3	$\frac{27}{16}=1.687500$	905.865	113.685
G♯	-4	$\frac{128}{81}=1.580247$	792.180	90.225
G	1	$\frac{3}{2}=1.500000$	701.955	90.225
G♭	6	$\frac{729}{512}=1.423828$	611.730	23.460

ピタゴラス音律

前ページの表から、ピタゴラス音律の半音の間隔には、次の 2 種類があることがわかる。

大半音:　$\dfrac{3^7}{2^{11}} = \dfrac{2187}{2048} = 1.067871 = 113.685\ \mathrm{cent}$

小半音:　$\dfrac{2^8}{3^5} = \dfrac{256}{243} = 1.053498 = 90.225\ \mathrm{cent}$

ピタゴラス音律では、大半音 5 つと小半音 7 つで、ちょうど 1 オクターブになる。

$$\left(\frac{3^7}{2^{11}}\right)^5 \cdot \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^7 = \frac{3^{35}}{2^{55}} \cdot \frac{2^{56}}{3^{35}} = 2$$

ピタゴラス音律

ピタゴラス音律の全音の間隔は、大半音と小半音の和になっている。

$$\frac{3^7}{2^{11}} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} = 1.125 = 203.910\ \mathrm{cent}$$

ただし、$\mathrm{F}\sharp - \mathrm{E}$ 間、$\mathrm{G}\sharp - \mathrm{G}\flat$ 間は、小半音 2 つ分である。

$$\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}} = \frac{65536}{59049} = 1.109858 = 180.450\ \mathrm{cent}$$

これは、$n = 6$ の $\mathrm{G}\flat$ と $n = -6$ の $\mathrm{F}\sharp$ がずれているためで、

$\mathrm{G}\flat - \mathrm{E}$ 間、$\mathrm{G}\sharp - \mathrm{F}\sharp$ 間は 203.910 cent である。

また、$\mathrm{G} - \mathrm{F}$ 間も 203.910 cent である。

ピタゴラス音律

$n=6$ の G♭は $\dfrac{3^6}{2^9}=\dfrac{729}{512}$、$n=-6$ の F♯は $\dfrac{2^{10}}{3^6}=\dfrac{1024}{729}$ であり、

$$\frac{3^6}{2^9}\cdot\frac{3^6}{2^{10}}=\frac{3^{12}}{2^{19}}=\frac{531441}{524288}=1.013643=23.460\ \mathrm{cent}$$

だけずれている。この音程差をピタゴラスコンマという。

大半音と小半音の差は、ピタゴラスコンマに等しい。

$$\frac{3^7}{2^{11}}\cdot\frac{3^5}{2^8}=\frac{3^{12}}{2^{19}}=\frac{531441}{524288}=1.013643=23.460\ \mathrm{cent}$$

ピタゴラス音律では、全音 6 つ(つまり、大半音 6 つと小半音 6 つ)で、1 オクターブにピタゴラスコンマを加えた 1223.460 cent になる。

ピタゴラス音律

周波数比として、$3:2$ の次に簡単な整数比は $5:4$ である。
基音 C$(n=0)$に対するE$(n=4)$の周波数比は

$$\frac{3^4}{2^6}=\frac{81}{64}=1.265625$$

であり、これは $\frac{5}{4}=1.25$ に対して

$$\frac{81/64}{5/4}=\frac{81/64}{80/64}=\frac{81}{80}=1.0125=21.506\ \mathrm{cent}$$

だけずれている。これをシントニックコンマという。$n=5$ の B と $n=1$ の G、$n=3$ の A と $n=-1$ の F の関係も同様である。

純正律

周波数比が $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ のピタゴラス音律の $n=-1$ から $n=3$ までの 4 つの音に、$\left(\frac{5}{4}\right)^m$ (m は整数)を組み合わせると、純正律が得られる。

基音が C の場合、各音のオクターブを調整して、基音の周波数 f_0 に対する比が $1 \leq f/f_0 < 2$ の範囲となるようにすると、次ページの表のようになる。

ここで、$m<0$ の場合を変(♭)系列、$m>0$ の場合を嬰(♯)系列としている。

	$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=2$	G♭ : $\frac{36}{25}$	B♭ : $\frac{9}{5}$	D : $\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{9}{8}$	F♯: $\frac{45}{16} \Rightarrow \frac{45}{32}$	A♯: $\frac{225}{64} \Rightarrow \frac{225}{128}$
$n=1$		E♭ : $\frac{6}{5}$	G : $\frac{3}{2}$	B : $\frac{15}{8}$	D♯: $\frac{75}{32} \Rightarrow \frac{75}{64}$
$n=0$		A♭ : $\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8}{5}$	C : 1	E : $\frac{5}{4}$	G♯: $\frac{25}{16}$
$n=-1$		D♭ : $\frac{8}{15} \Rightarrow \frac{16}{15}$	F : $\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}$	A : $\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{3}$	C♯: $\frac{25}{24}$

純正律

前ページの表を f/f_0 の順に並べ替えて、基音の 1 オクターブ上の C を付け加えると、$m < 0$ の場合の変（♭）系列についてはp. 14、$m > 0$ の場合が嬰（♯）系列についてはp. 15の表が得られる。

ここで、D♭とC♯には、

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 2 = \frac{64}{125} \cdot 2 = \frac{128}{125} = 1.024 = 41.059\ \mathrm{cent}$$

の音程差がある。E♭とD♯、G♭とF♯、A♭とG♯、B♭とA♯についても同様である。この音程差をエンハーモニックコンマという。

音名	f/f_0	P [cent]]	ΔP
G♭	$\frac{36}{25}=1.440000$	631.283	133.238
F	$\frac{4}{3}=1.333333$	498.045	111.731
E	$\frac{5}{4}=1.250000$	386.314	70.672
E♭	$\frac{6}{5}=1.200000$	315.641	111.731
D	$\frac{9}{8}=1.125000$	203.910	92.179
D♭	$\frac{16}{15}=1.066667$	111.731	111.731
C	$\frac{1}{1}=1.000000$	0.000	

音名	f/f_0	P [cent]]	ΔP
C	$\frac{2}{1}=2.000000$	1200.000	111.731
B	$\frac{15}{8}=1.875000$	1088.269	70.672
B♭	$\frac{9}{5}=1.800000$	1017.596	133.238
A	$\frac{5}{3}=1.666667$	884.359	70.672
A♭	$\frac{8}{5}=1.600000$	813.686	111.731
G	$\frac{3}{2}=1.500000$	701.955	70.672

音名	$f\,/\,f_0$	P [cent]]	ΔP
F♯	$\frac{45}{32} = 1.406250$	590.224	92.179
F	$\frac{4}{3} = 1.333333$	498.045	111.731
E	$\frac{5}{4} = 1.250000$	386.314	111.731
D♯	$\frac{75}{64} = 1.171875$	274.582	70.672
D	$\frac{9}{8} = 1.125000$	203.910	133.238
C♯	$\frac{25}{24} = 1.041667$	70.672	70.672
C	$\frac{1}{1} = 1.000000$	0.000	

音名	$f\,/\,f_0$	P [cent]]	ΔP
C	$\frac{2}{1} = 2.000000$	1200.000	111.731
B	$\frac{15}{8} = 1.875000$	1088.269	111.731
A♯	$\frac{225}{128} = 1.757813$	976.537	92.179
A	$\frac{5}{3} = 1.666667$	884.359	111.731
G♯	$\frac{25}{16} = 1.562500$	772.627	70.672
G	$\frac{3}{2} = 1.500000$	701.955	111.731

純正律

p. 14、p. 15の表から、純正律では、全音の間隔に次の 2 種類があることがわかる。

大全音: $\dfrac{9}{8} = 1.125 = 203.910\ \mathrm{cent}$

小全音: $\dfrac{10}{9} = 1.111111 = 182.403\ \mathrm{cent}$

大全音と小全音の差は、シントニックコンマに等しい。

$$\frac{9/8}{10/9} = \frac{81}{80} = 1.0125 = 21.506\ \mathrm{cent}$$

純正律

さらに、半音の間隔は、次の 4 種類があることがわかる。

全音階的半音: $$\frac{16}{15} = 1.066667 = 111.731\ \mathrm{cent}$$

半音階的大半音: $$\frac{9/8}{16/15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{15}{16} = \frac{135}{128} = 1.0546875 = 92.179\ \mathrm{cent}$$

半音階的大半音を、大クローマ、または小リンマともいう。

半音階的小半音: $$\frac{25}{24} = 1.041667 = 70.672\ \mathrm{cent}$$

半音階的小半音を、小クローマともいう。

大リンマ: $$\frac{9/8}{25/24} = \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25} = 1.08 = 133.238\ \mathrm{cent}$$

純正律

p. 12の表を参照すると、それぞれの半音の由来は、次のとおりである。

全音階的半音: $$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot 2=\frac{2^4}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}$$

半音階的大半音: $$\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{8}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3^3\cdot 5}{2^7}=\frac{135}{128}$$

半音階的小半音: $$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{16}=\frac{1}{3}\cdot\frac{25}{8}=\frac{5^2}{3\cdot 2^3}=\frac{25}{24}$$

大リンマ: $$\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{8}\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3^3}{5^2}=\frac{27}{25}$$

純正律

大全音は、全音階的半音と半音階的大半音の和である。

$$\frac{16}{15}\cdot\frac{135}{128}=\frac{9}{8}$$

小全音は、全音階的半音と半音階的小半音の和である。

$$\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}=\frac{10}{9}$$

純正律では、大全音 3 つと小全音 2 つ、全音階的半音 2 つで 1 オクターブになる。

$$\left(\frac{9}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{16}{15}\right)^2=\frac{9^3}{8^3}\cdot\frac{2^2\cdot 5^2}{9^2}\cdot\frac{16^2}{3^2\cdot 5^2}=\frac{9}{2^9}\cdot\frac{2^2}{1}\cdot\frac{2^8}{3^2}=2$$

純正律

大リンマと全音階的半音の差は、シントニックコンマに等しい。

$$\frac{27/25}{16/15}=\frac{27}{25}\cdot\frac{15}{16}=\frac{81}{80}$$

半音階的大半音（大クローマ）と半音階的小半音（小クローマ）の差は、シントニックコンマに等しい。

$$\frac{135/128}{25/24}=\frac{135}{128}\cdot\frac{24}{25}=\frac{27}{16}\cdot\frac{3}{5}=\frac{81}{80}$$

純正律

大リンマと半音階的大半音(小リンマ)の差は、エンハーモニックコンマ(純正律のD♭とC♯の音程差)に等しい。

$$\frac{27/25}{135/128} = \frac{27}{25} \cdot \frac{128}{135} = \frac{1}{25} \cdot \frac{128}{5} = \frac{128}{125}$$

全音階的半音と半音階的小半音の差は、エンハーモニックコンマ(純正律のD♭とC♯の音程差)に等しい。

$$\frac{16/15}{25/24} = \frac{16}{15} \cdot \frac{24}{25} = \frac{16}{5} \cdot \frac{8}{25} = \frac{128}{125}$$

12 平均律

1 オクターブを 12 音で等分したものが 12 平均律である。

12 平均律の半音の間隔は、すべて $1200 \times \frac{1}{12} = 100$ cent である。

12 平均律では、C♯とD♭は異名同音となる。同様に、D♯とE♭、F♯とG♭、G♯とA♭、A♯とB♭も、それぞれ異名同音となる。

次ページの表は、12 平均律の音程を、純正律と比較して示したものである。

音名	12平均律	純正律	差 [cent]
F♯	$2^{1/2} = 1.414214$	$\frac{45}{32} = 1.406250$	9.776
F	$2^{5/12} = 1.334840$	$\frac{4}{3} = 1.333333$	1.955
E	$2^{1/3} = 1.259921$	$\frac{5}{4} = 1.250000$	13.686
E♭	$2^{1/4} = 1.189207$	$\frac{6}{5} = 1.200000$	-15.641
D♯		$\frac{75}{64} = 1.171875$	25.418
D	$2^{1/6} = 1.122462$	$\frac{9}{8} = 1.125000$	-3.910
D♭	$2^{1/12} = 1.059463$	$\frac{16}{15} = 1.066667$	-11.731
C♯		$\frac{25}{24} = 1.041667$	29.328

音名	12平均律	純正律	差 [cent]
B	$2^{11/12} = 1.887749$	$\frac{15}{8} = 1.875000$	11.731
B♭	$2^{5/6} = 1.781797$	$\frac{9}{5} = 1.800000$	-17.596
A♯		$\frac{225}{128} = 1.757813$	23.463
A	$2^{3/4} = 1.681793$	$\frac{5}{3} = 1.666667$	15.641
A♭	$2^{2/3} = 1.587401$	$\frac{8}{5} = 1.600000$	-13.686
G♯		$\frac{25}{16} = 1.562500$	27.373
G	$2^{7/12} = 1.498307$	$\frac{3}{2} = 1.500000$	-1.955
G♭	$2^{1/2} = 1.414214$	$\frac{36}{25} = 1.440000$	-31.283

12 平均律

12 平均律では、

$$2^{7/12} = 1.498307$$

が $\dfrac{3}{2} = 1.5$ に近いことから、G 音の純正律との差は -1.955 cent と小さい。しかし、

$$2^{4/12} = 2^{1/3} = 1.259921$$

が $\dfrac{5}{4} = 1.25$ とずれているため、E 音は純正律との差が 13.686 cent と大きい。

12 平均律と純正律の差

12 平均律での G 音のセント値は

$$1200 \log_2 2^{7/12} = 1200 \times \frac{7}{12}$$

であり、これが純正律の

$$1200 \log_2 \frac{3}{2} = 1200 \times (\log_2 3 - 1)$$

に近いかどうかは、$\log_2 3$ の 12 倍が整数に近いかどうかで決まる。
実際、

$$12 \log_2 3 = 12 \times 1.5849625 = 19.019550$$

であり、整数（19）との差は 0.1 より小さい（この差の 100 倍が、純正律と 12 平均律のセント差である）。

12 平均律と純正律の差

12 平均律での E 音のセント値は

$$1200 \log_2 2^{4/12} = 1200 \times \frac{4}{12}$$

であり、これが純正律の

$$1200 \log_2 \frac{5}{4} = 1200 \times (\log_2 5 - 2)$$

に近いかどうかは、$\log_2 5$ の 12 倍が整数に近いかどうかで決まる。
実際、

$$12 \log_2 5 = 12 \times 2.321928 = 27.863137 = 28 - 0.136863$$

であり、整数（28）との差は 0.1 より大きい（この差の 100 倍が、純正律と 12 平均律のセント差である）。

53 平均律

1 オクターブを 53 音で等分したものが 53 平均律である。

53 平均律では、$1200 \times \dfrac{1}{53} = 22.642\ \mathrm{cent}$ 刻みで音を設定できる。

それに加えて、各音の純正律との差が小さいことも重要である。

53 平均律では、

$$2^{31/53} = 1.499941$$

$$2^{17/53} = 1.248984$$

であり、それぞれが $\dfrac{3}{2} = 1.5$、$\dfrac{5}{4} = 1.25$ に極めて近い。その差は、

それぞれ $-0.068\ \mathrm{cent}$、$-1.408\ \mathrm{cent}$ である。

音名	53平均律	純正律	差[cent]
F♯	$2^{26/53} = 1.404996$	$\frac{45}{32} = 1.406250$	-1.544
F	$2^{22/53} = 1.333386$	$\frac{4}{3} = 1.333333$	0.068
E	$2^{17/53} = 1.248984$	$\frac{5}{4} = 1.250000$	-1.408
E♭	$2^{14/53} = 1.200929$	$\frac{6}{5} = 1.200000$	1.340
D♯	$2^{12/53} = 1.169924$	$\frac{75}{64} = 1.171875$	-2.884
D	$2^{9/53} = 1.124911$	$\frac{9}{8} = 1.125000$	-0.136
D♭	$2^{5/53} = 1.067577$	$\frac{16}{15} = 1.066667$	1.476
C♯	$2^{3/53} = 1.040015$	$\frac{25}{24} = 1.041667$	-2.748

音名	53平均律	純正律	差[cent]
B	$2^{48/53} = 1.873402$	$\frac{15}{8} = 1.875000$	-1.476
B♭	$2^{45/53} = 1.801323$	$\frac{9}{5} = 1.800000$	1.272
A♯	$2^{43/53} = 1.754817$	$\frac{225}{128} = 1.757813$	-2.953
A	$2^{39/53} = 1.665377$	$\frac{5}{3} = 1.666667$	-1.340
A♭	$2^{36/53} = 1.601302$	$\frac{8}{5} = 1.600000$	1.408
G♯	$2^{34/53} = 1.559960$	$\frac{25}{16} = 1.562500$	-2.816
G	$2^{31/53} = 1.499941$	$\frac{3}{2} = 1.500000$	-0.068
G♭	$2^{28/53} = 1.442231$	$\frac{36}{25} = 1.440000$	2.680

53 平均律と純正律の差

53 平均律での G 音のセント値は

$$1200 \log_2 2^{31/53} = 1200 \times \frac{31}{53}$$

であり、これが純正律の

$$1200 \log_2 \frac{3}{2} = 1200 \times (\log_2 3 - 1)$$

に近いかどうかは、$\log_2 3$ の 53 倍が整数に近いかどうかで決まる。
実際、

$$53 \log_2 3 = 53 \times 1.5849625 = 84.003013$$

であり、整数(84)との差は 0.1 より小さい(この差の 1200/53 倍が、純正律と 53 平均律のセント差である)。

53 平均律と純正律の差

53 平均律での E 音のセント値は

$$1200 \log_2 2^{17/53} = 1200 \times \frac{17}{53}$$

であり、これが純正律の

$$1200 \log_2 \frac{5}{4} = 1200 \times (\log_2 5 - 2)$$

に近いかどうかは、$\log_2 5$ の 53 倍が整数に近いかどうかで決まる。
実際、

$$53 \log_2 5 = 53 \times 2.321928 = 123.062189$$

であり、整数（123）との差は 0.1 より小さい（この差の 1200/53 倍が、純正律と 53 平均律のセント差である）。

53 平均律と純正律の差

G と E 以外の音についても、純正律での基音との周波数比に含まれる素因数は 2、3、5 のみだから、53 平均律と純正律の音程のずれは、$53\log_2 3$ と $53\log_2 5$ の小数部の大きさで決まる。

例えば、A 音では、純正律での基音との周波数比は $\frac{5}{3}$ だから

$53\log_2 5 - 123 = 0.062189$ と $53\log_2 3 - 84 = 0.00301$ より

$$(0.062189 - 0.003013) \times \frac{1200}{53} = 1.340$$

が、純正律と 53 平均律のセント差である。

p 平均律と純正律の差

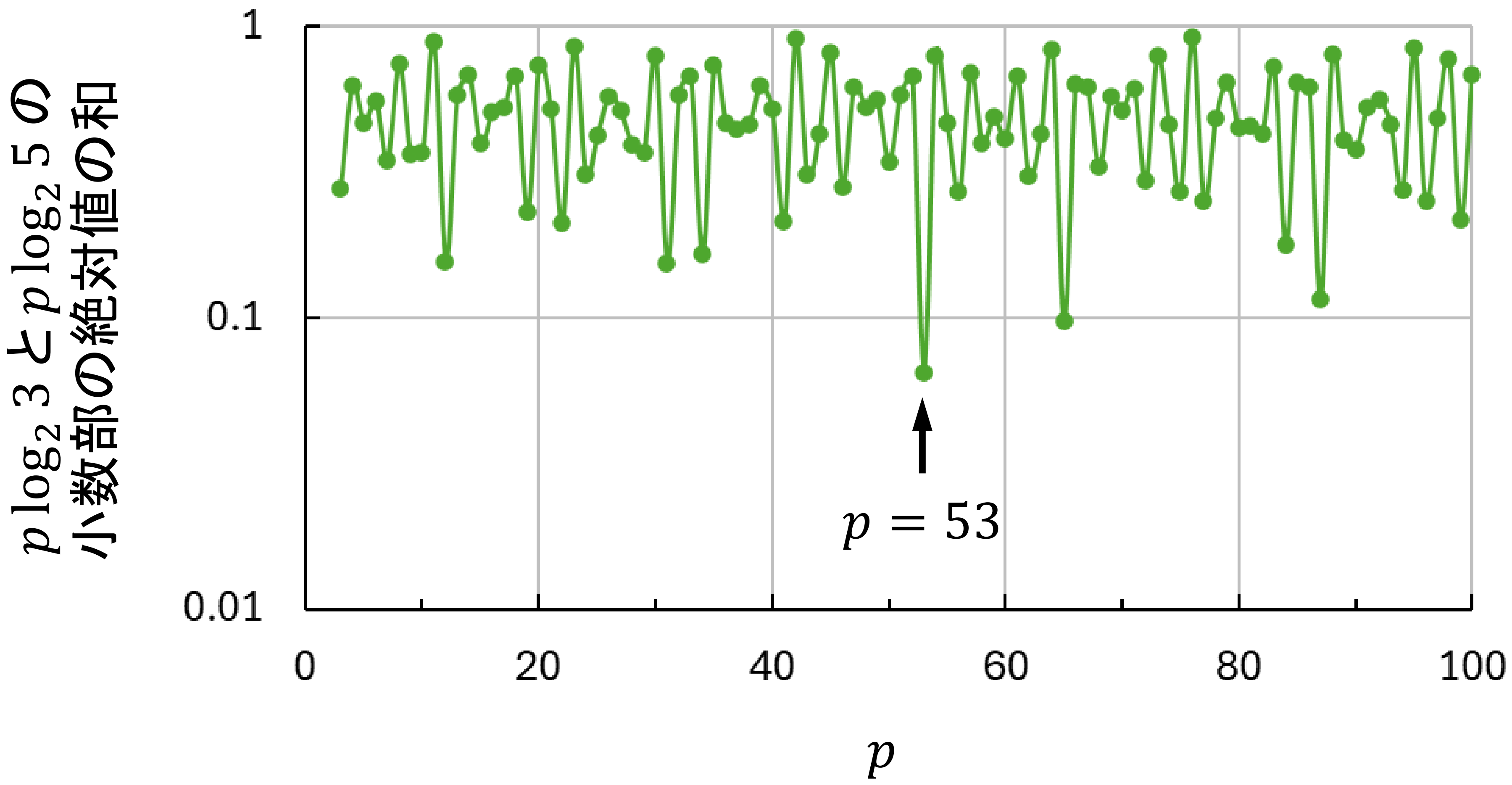
一般に、1 オクターブを p 個の音で等分した p 平均律を考えると、純正律との音程のずれは、$p\log_2 3$ と $p\log_2 5$ の小数部の大きさで決まる。

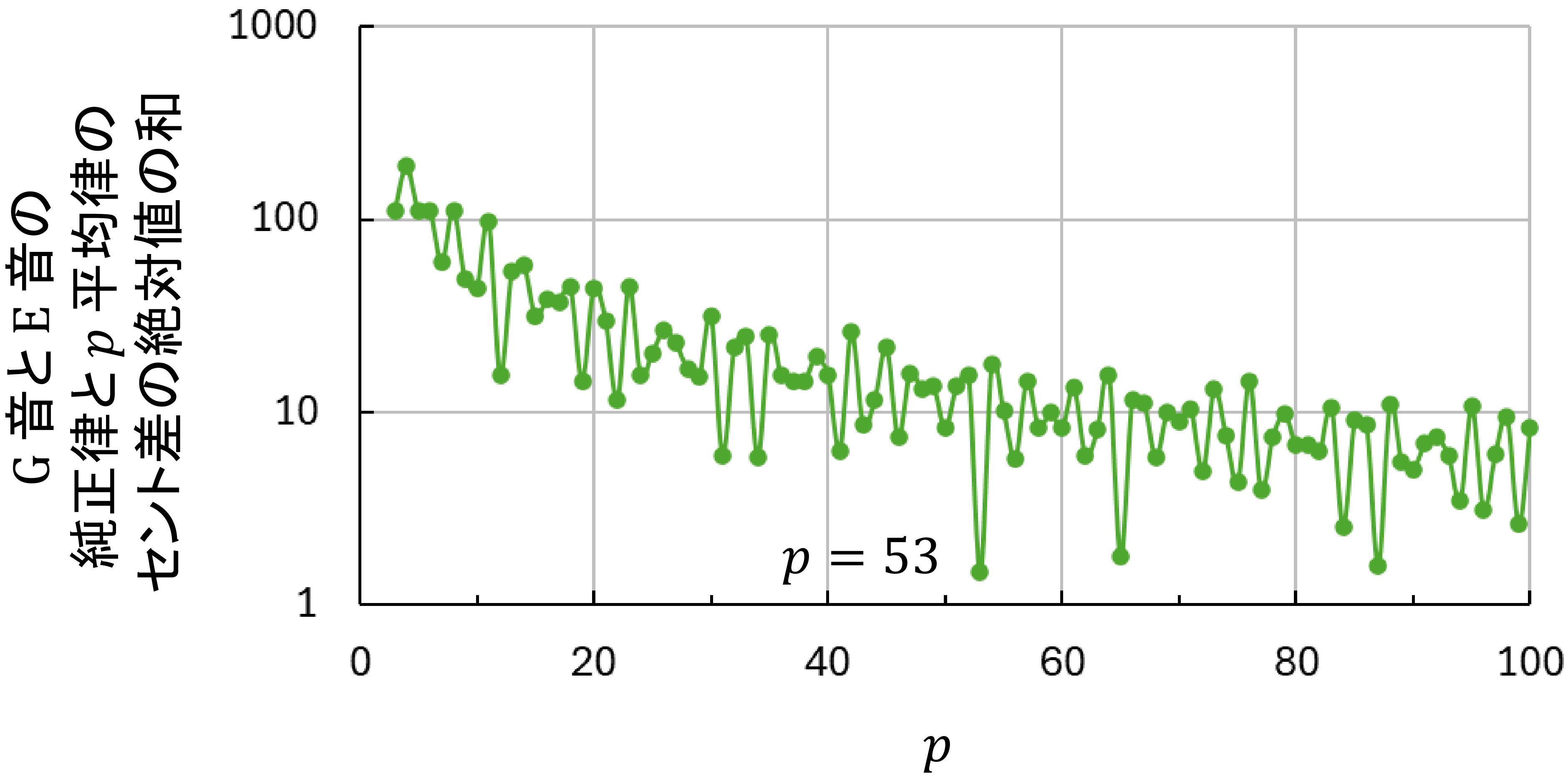
p. 33に、$p=3$ から $p=100$ までの整数について、$p\log_2 3$ と $p\log_2 5$ の小数部(を $-0.5<\Delta\leq 0.5$ の範囲で表したもの)の絶対値の和を示す。

また、p. 34にそれを $1200/p$ 倍したもの(G 音と E 音の純正律と p 平均律のセント差の絶対値の和)を示す。

いずれも、$p=53$ で顕著に値が小さくなっていることがわかる。

つまり、$\log_2 3$ の 53 倍、$\log_2 5$ の 53 倍が整数に近いことが、53 平均律のミソである。


$p\log_2 3$ と $p\log_2 5$ の
小数部の絶対値の和
1
0.1
0.01
0
20
40
60
80
100
p
$p = 53$


G 音と E 音の
純正律と p 平均律の
セント差の絶対値の和
1000
100
10
1
0
20
40
60
80
100
$p = 53$
p

まとめ

周波数比が $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ の音で構成されるピタゴラス音律では、$3^{12} = 531441$ と $2^{19} = 524288$ の違いによる音程差（ピタゴラスコンマ）が生じる。また、$3^4 = 81$ と $2^4 \cdot 5 = 80$ の違いによる音程差（シントニックコンマ）が生じる。

周波数比が $\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{5}{4}\right)^m$ の音で構成される純正律では、$2^7 = 128$ と $5^3 = 125$ の違いによる音程差（エンハーモニックコンマ）が生じる。

周波数比が $2^{n/12}$ の音で構成される 12 平均律では、G 音は純正律との差が小さいが、E 音は純正律との差が大きい。

周波数比が $2^{n/53}$ の音で構成される 53 平均律では、G 音も E 音も純正律との差が小さい。

謝辞

53 音律を教えていただいた安部哲哉氏に感謝いたします。

参考文献

- 芥川也寸志「音楽の基礎」（岩波新書）、岩波書店、1971
- 小方厚「音律と音階の科学ードレミ・・・はどのようにして生まれたか」（ブルーバックス）、講談社、2007
- ジョン・パウエル「響きの科学ー名曲の秘密から絶対音感まで」（小野木明恵 訳）、早川書房、2016