ガウス積分の作法

渡邉 俊夫

ガウス関数

ガウス関数は

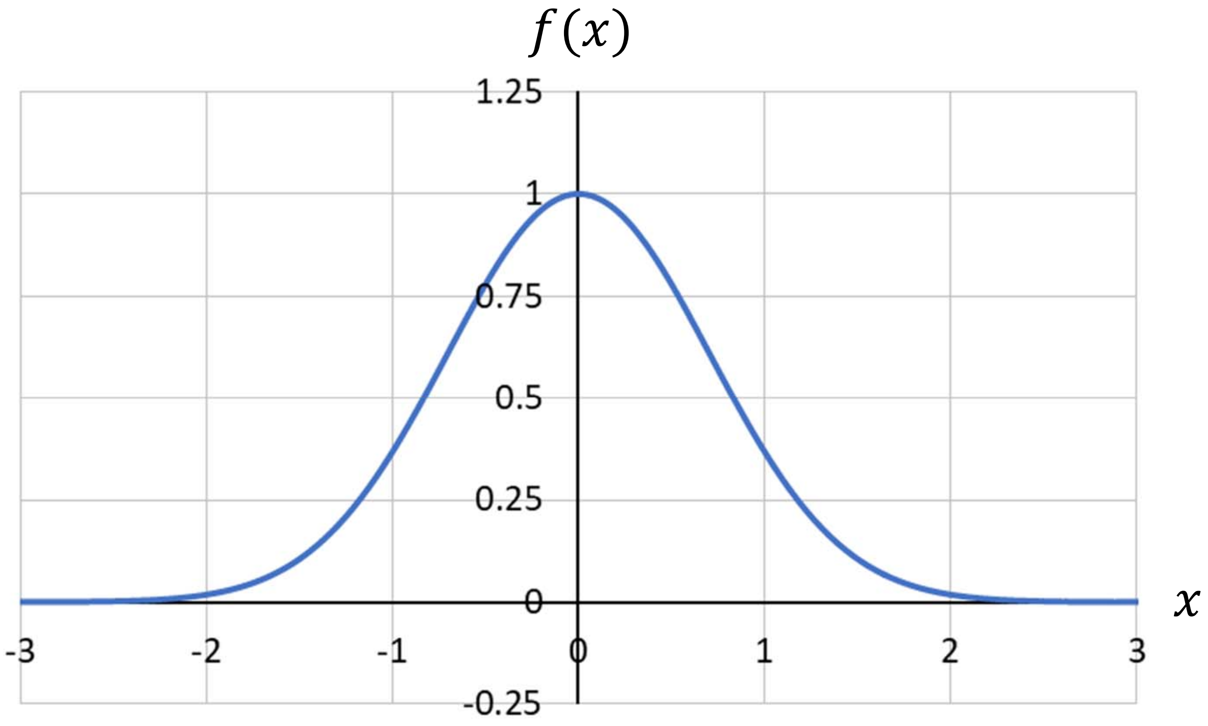
$$f(x) = e^{-x^2}$$

で表される。

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$$

となるのは $x = 0$ のときであり、このとき $f(x)$ は最大値 $f(0) = 1$ をとる。

$f(x)$ は偶関数であり、直線 $x = 0$ に対して左右対称である。グラフは右図のようになる。



ガウス関数の定積分

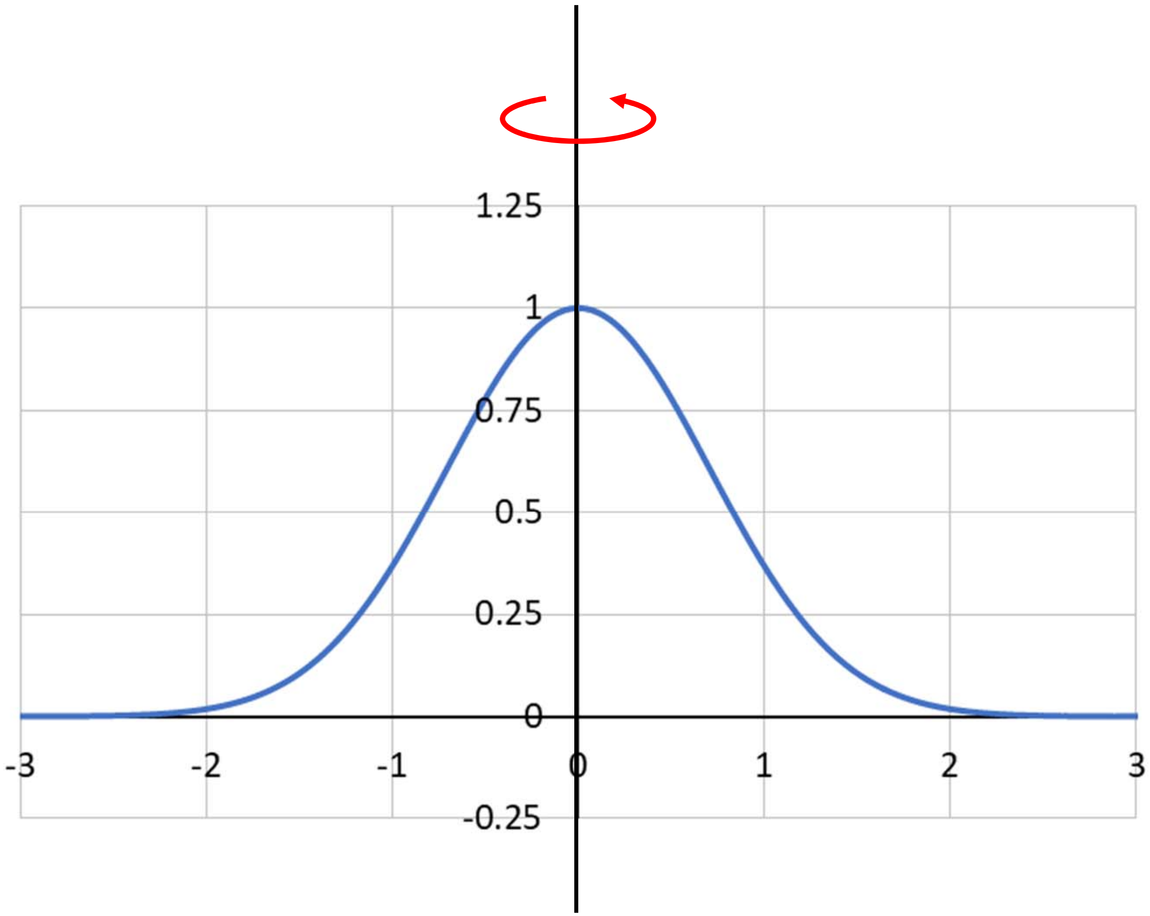
定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

を求めるために、$f(x) = e^{-x^2}$ を中心軸のまわりで回転して得られる回転体

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

の体積 V を考える。



ガウス関数の定積分

回転体 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の z 軸に垂直な断面の円の面積は

$$S(z) = \pi(x^2 + y^2) = -\pi \log z$$

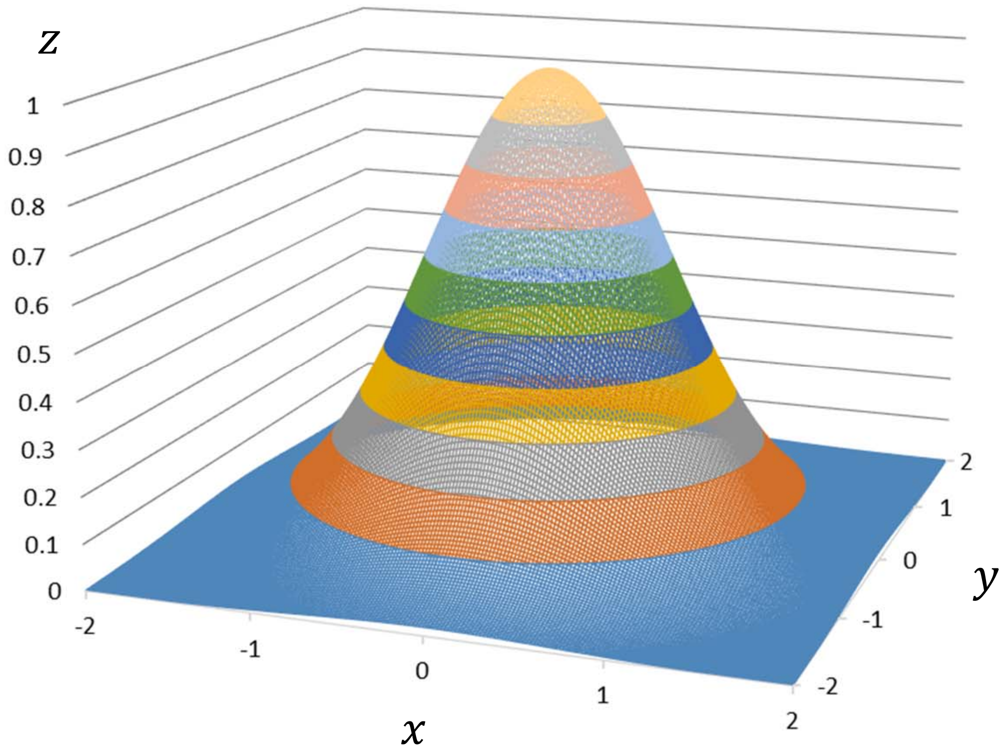
であるから、回転体の体積は

$$V = \int_0^1 S(z)dz$$

$$= -\pi \int_0^1 \log z \, dz$$

$$= -\pi[z \log z - z]_0^1 \quad = \pi$$

となる。



ガウス関数の定積分

回転体 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の y 軸に垂直な断面の面積は

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx$$

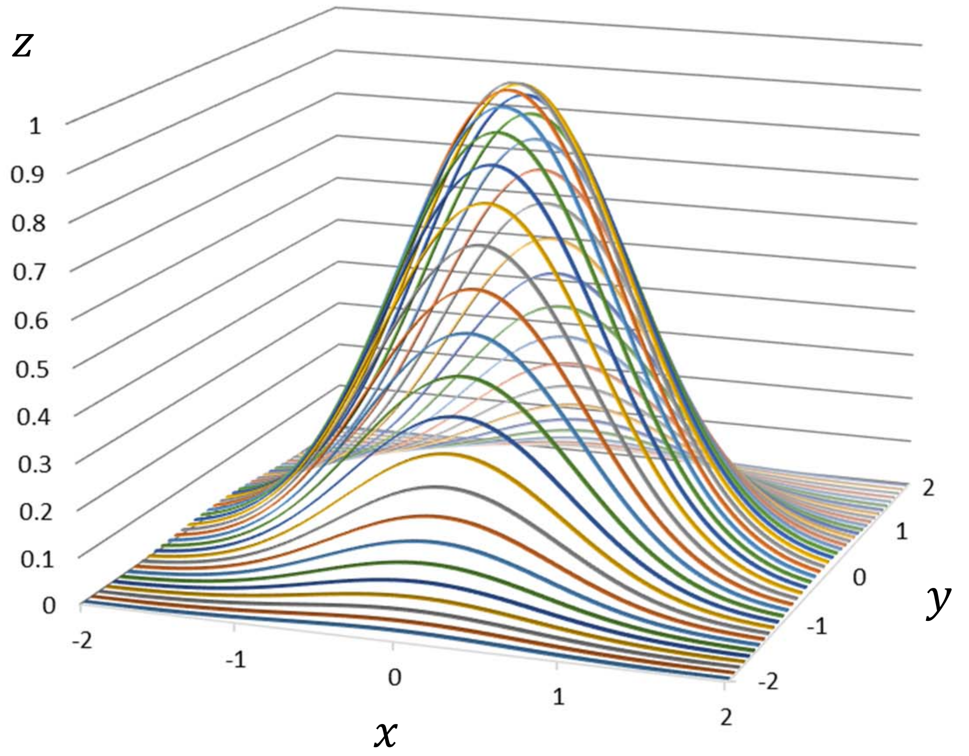
であるから、回転体の体積は

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} S(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2$$

となる。



ガウス関数の定積分

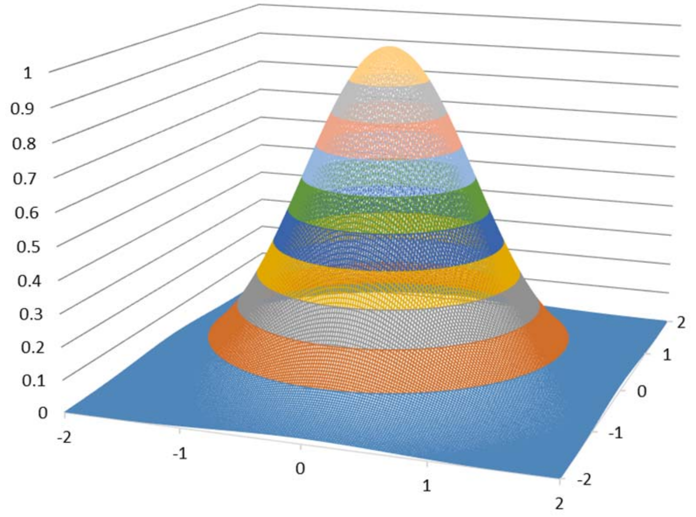
回転体 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ の体積を2通りの方法で計算すると

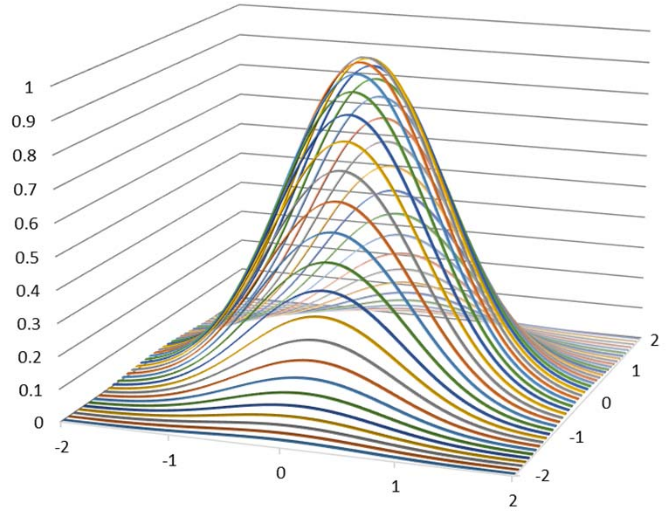
$$V = \pi = I^2$$

となる。これより、求める定積分が

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

であることがわかる。





$$V = \int_0^1 S(z)dz = \pi \qquad V = \int_{-\infty}^{\infty} S(y)dy = I^2$$

ガウス関数の定積分(別解)

定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

は、次のように直交座標 (x, y) を極座標 (r, θ) に変換して求めることもできる。

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}dr\,rd\theta = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\infty} re^{-r^2}dr = 2\pi\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_{0}^{\infty} = \pi$$

$$\therefore I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$