冪関数と指数関数
そして、xのx乗

渡邉 俊夫

xのa乗：冪関数

a を正の定数として、$x \geq 0$ において x の冪関数

$$f(x) = x^a$$

を考えると、$f(0) = 0, f(1) = 1$
である。また、

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

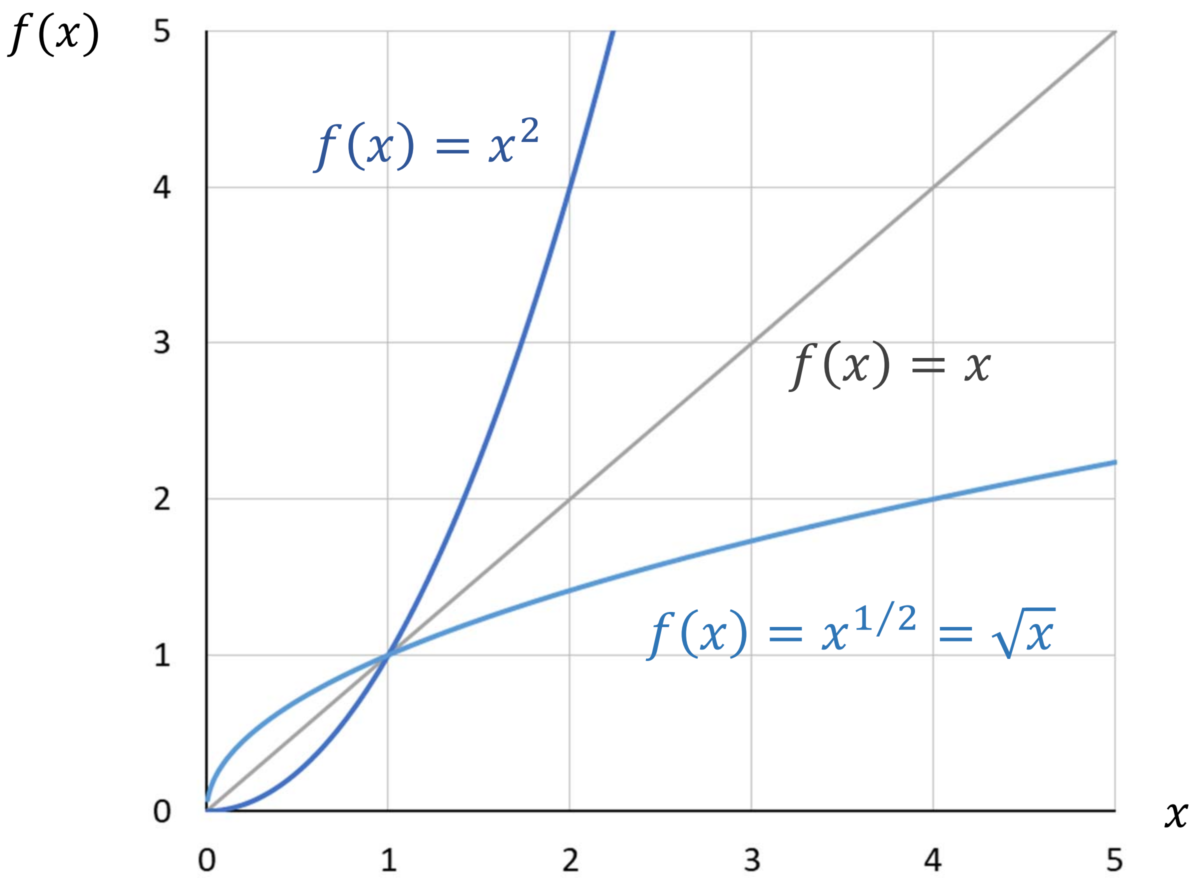
$$f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

より、$f(x)$ は増加関数であり、

$a > 1$ のとき下に凸の曲線

$a = 1$ のとき直線 $f(x) = x$

$a < 1$ のとき上に凸の曲線である。



aのx乗：指数関数

a を正の定数として、$x \geq 0$ において指数関数

$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \log a}$$

を考えると、$f(0) = 1, f(1) = a$

である。また、

$$f'(x) = \log a \cdot \mathrm{e}^{x \log a} = \log a \cdot a^x$$

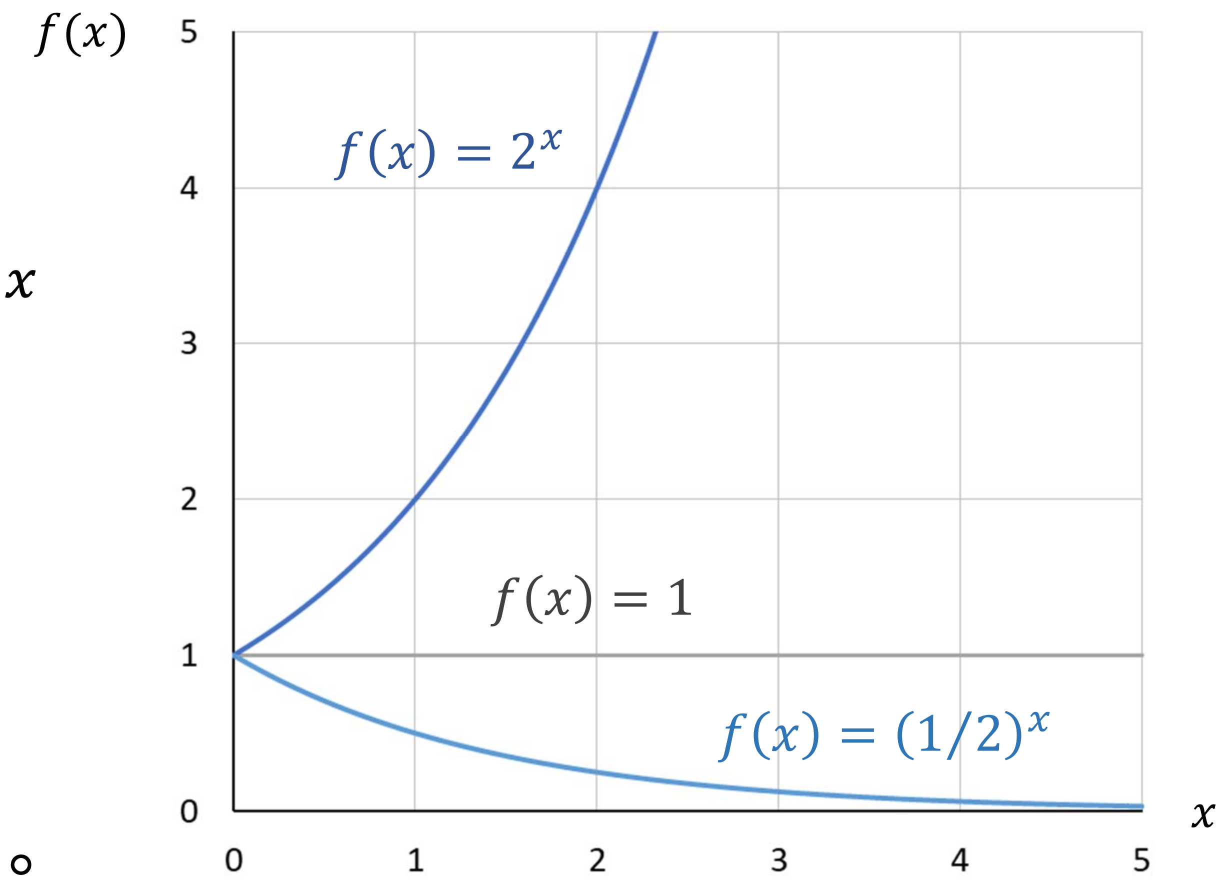
$$f''(x) = (\log a)^2 \cdot a^x$$

より、$f(x)$ は $a \neq 1$ のとき下に凸で、

$a > 1$ のとき増加関数、

$a < 1$ のとき減少関数であり、

$a = 1$ のときは直線 $f(x) = 1$ である。



xのx乗：関数値

$x > 0$ において x の x 乗

$$f(x) = x^x = e^{x \log x}$$

を考えると、$f(1) = 1$ である。また、

$$\log f(x) = x \log x = \frac{\log x}{1/x}$$

より、$x \to 0$ のとき

$$\log f(x) \to \frac{(\log x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$$

であるから、$f(0) \to 1$ である。

xのx乗：微分

$x>0$においてxのx乗

$$f(x)=x^x=\mathrm{e}^{x\log x}$$

の微分は

$$f'(x)=(x\log x)'\mathrm{e}^{x\log x}=\left(\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)x^x=\log x\cdot x^x+x^x$$

となる。これは

$(a^x)'=\log a\cdot a^x$で$a=x$とした$\log x\cdot x^x$

と

$(x^a)'=ax^{a-1}$で$a=x$とした$x\cdot x^{x-1}=x^x$

の和になっている。

xのx乗：極小値

$x > 0$ において x の x 乗

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$$

の微分

$$f'(x) = \log x \cdot x^x + x^x = (\log x + 1)x^x$$

が 0 となるのは $\log x + 1 = 0$ すなわち $x = \mathrm{e}^{-1} = 1/e \approx 0.3679$ のときである。

$0 < x < 1/e$ で $f'(x) < 0$ であるから $f(x)$ は減少関数、

$x > 1/e$ で $f'(x) > 0$ であるから $f(x)$ は増加関数である。

したがって、$f(x)$ は $x = 1/e$ のとき、極小値 $f(1/e) = (1/e)^{1/e}$
$= 1/\sqrt[e]{e} \approx 0.6922$ をとる。

xのx乗：2階微分

$x > 0$ において x の x 乗

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$$

の微分

$$f'(x) = \log x \cdot x^x + x^x = (\log x + 1)x^x$$

より、2階微分は

$$f''(x) = \frac{1}{x} \cdot x^x + (\log x + 1)^2 x^x = \left(\frac{1}{x} + (\log x + 1)^2\right) x^x > 0$$

であるから、$f(x)$ は下に凸の曲線である。

xのx乗：まとめ

以上をまとめると、$x > 0$ において x の x 乗

$$f(x) = x^x$$

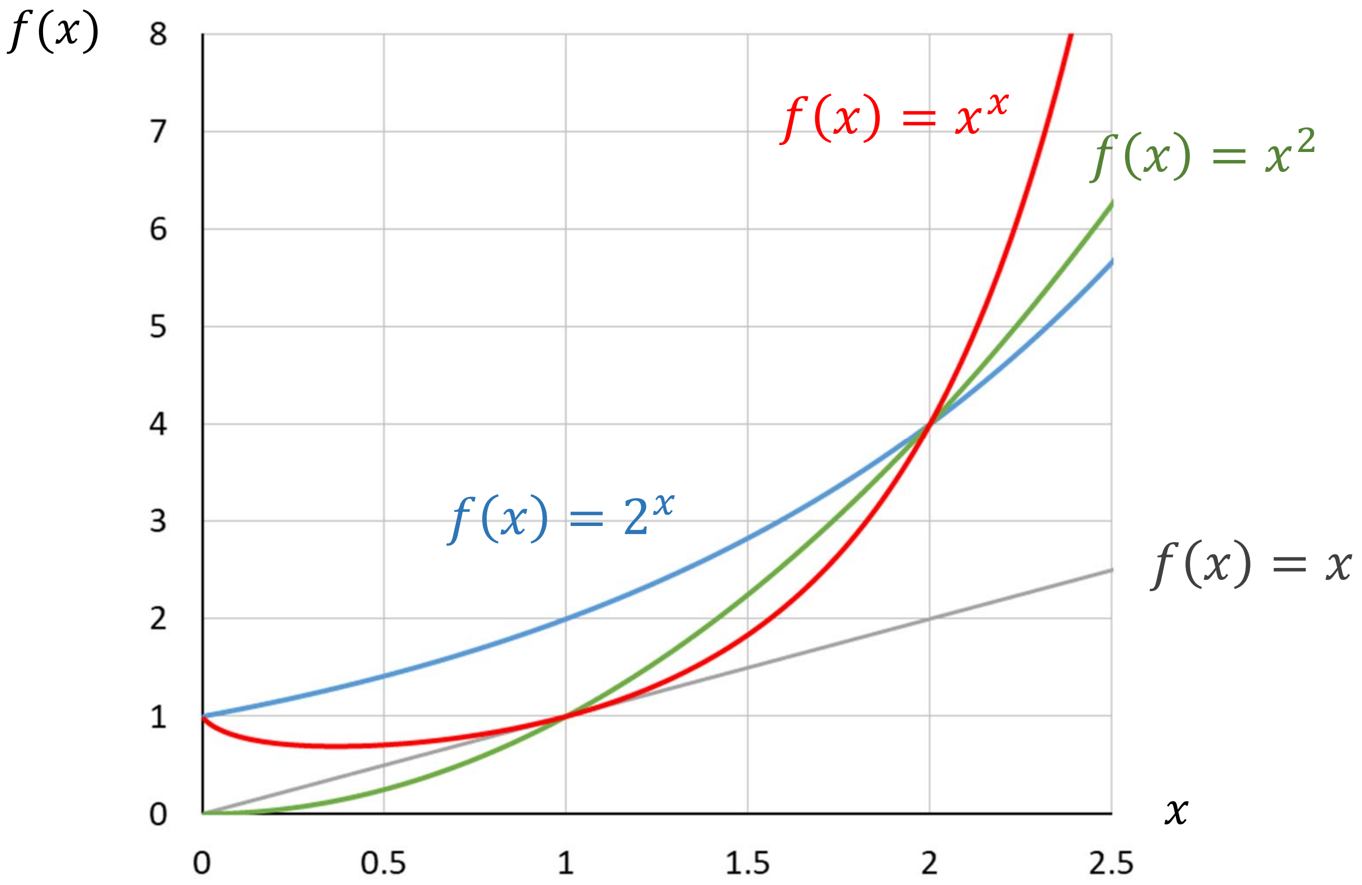
を考えると、$f(1) = 1, f(0) \to 1$ である。

また、$0 < x < 1/e$ で $f(x)$ は減少関数、$x > 1/e$ で $f(x)$ は増加関数であり、$x = 1/e$ のとき、極小値 $f(1/e) = 1/\sqrt[e]{e}$ をとる。

そして、$f(x)$ は下に凸の曲線である。

xのx乗：グラフ

したがって、$x \geq 0$ において $f(x) = x^x$ のグラフは下図のようになる。



<u>参考文献</u>
土基善文
「xのx乗のはなし」
日本評論社、2002