i!
（iの階乗）

渡邉 俊夫

iの階乗

ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \lim_{m \to \infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^{m} (z+k)}$$

は正の整数 n に対して

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

を与え、階乗の定義域を複素数まで拡張したものになっている。

これを用いると、虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ の階乗は

$$i! = \Gamma(i+1) = i\Gamma(i)$$

と表される。

i!の絶対値

ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

において $z=i$ とすると、左辺は

$$\Gamma(i)\Gamma(1-i)=\Gamma(i)\cdot(-i)\Gamma(-i)=-i\Gamma(i)\Gamma(-i)=-i\Gamma(i)\Gamma(\bar{i})$$

$$=-i\Gamma(i)\overline{\Gamma(i)}=-i|\Gamma(i)|^{2}$$

となるから

$$-i|\Gamma(i)|^{2}=\Gamma(i)\Gamma(1-i)=\frac{\pi}{\sin i\pi}$$

i!の絶対値

$$-i|\Gamma(i)|^2 = \frac{\pi}{\sin i\pi}$$

より

$$|\Gamma(i)|^2 = \frac{\pi}{-i\sin i\pi} = \frac{\pi}{-i\dfrac{e^{i\cdot i\pi}-e^{-i\cdot i\pi}}{2i}} = \frac{\pi}{-\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}} = \frac{\pi}{\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sinh\pi}$$

ゆえに、$i! = \Gamma(i+1) = i\Gamma(i)$ の絶対値は

$$|i!| = |i\Gamma(i)| = |i||\Gamma(i)| = |\Gamma(i)| = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh\pi}} = 0.521564047$$

i!の偏角

ガンマ関数の乗積表示

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^{m}(z+k)} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^z \prod_{k=1}^{m} k}{z\prod_{k=1}^{m}(z+k)} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^z}{z\prod_{k=1}^{m}\frac{z+k}{k}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{z\log m}}{z\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{z}{k}\right)}$$

において $z = i$ とすると、

$$\Gamma(i) = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\log m}}{i\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{i}{k}\right)}$$

i!の偏角

$$\Gamma(i) = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\log m}}{i\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{i}{k}\right)}$$

より、$i! = \Gamma(i+1) = i\Gamma(i)$ の偏角の主値は

$$\mathrm{Arg}(i!) = \mathrm{Arg}[i\Gamma(i)] = \mathrm{Arg}\left(\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\log m}}{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{i}{k}\right)}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\mathrm{Arg}\frac{\mathrm{e}^{i\log m}}{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{i}{k}\right)}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\log m - \sum_{k=1}^{m}\tan^{-1}\frac{1}{k}\right)$$

$$= -0.30164032$$

i!の値

$$|i!| = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh \pi}} = 0.521564047$$

$$\mathrm{Arg}(i!) = \lim_{m\to\infty}\left(\log m - \sum_{k=1}^{m} \tan^{-1}\frac{1}{k}\right) = -0.30164032$$

より、

$$i! = 0.521564047\mathrm{e}^{-i0.30164032}$$

$$= 0.521564047 \cdot [\cos(0.30164032) - i\sin(0.30164032)]$$

$$= 0.498015668 - i0.154949828$$

を得る。

スターリングの近似

正の整数 n の階乗 $n!$ に対して、$n \gg 1$ のとき、スターリングの近似

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,n^n \mathrm{e}^{-n}$$

が成り立つ。これが複素数 z に対しても成り立つとして計算すると

$$i! \approx \sqrt{2\pi i} \cdot i^i \mathrm{e}^{-i} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\pi/2} \cdot (\cos 1 - i \sin 1)$$

$$= \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\pi/2}[(\cos 1 + \sin 1) + i(\cos 1 - \sin 1)]$$

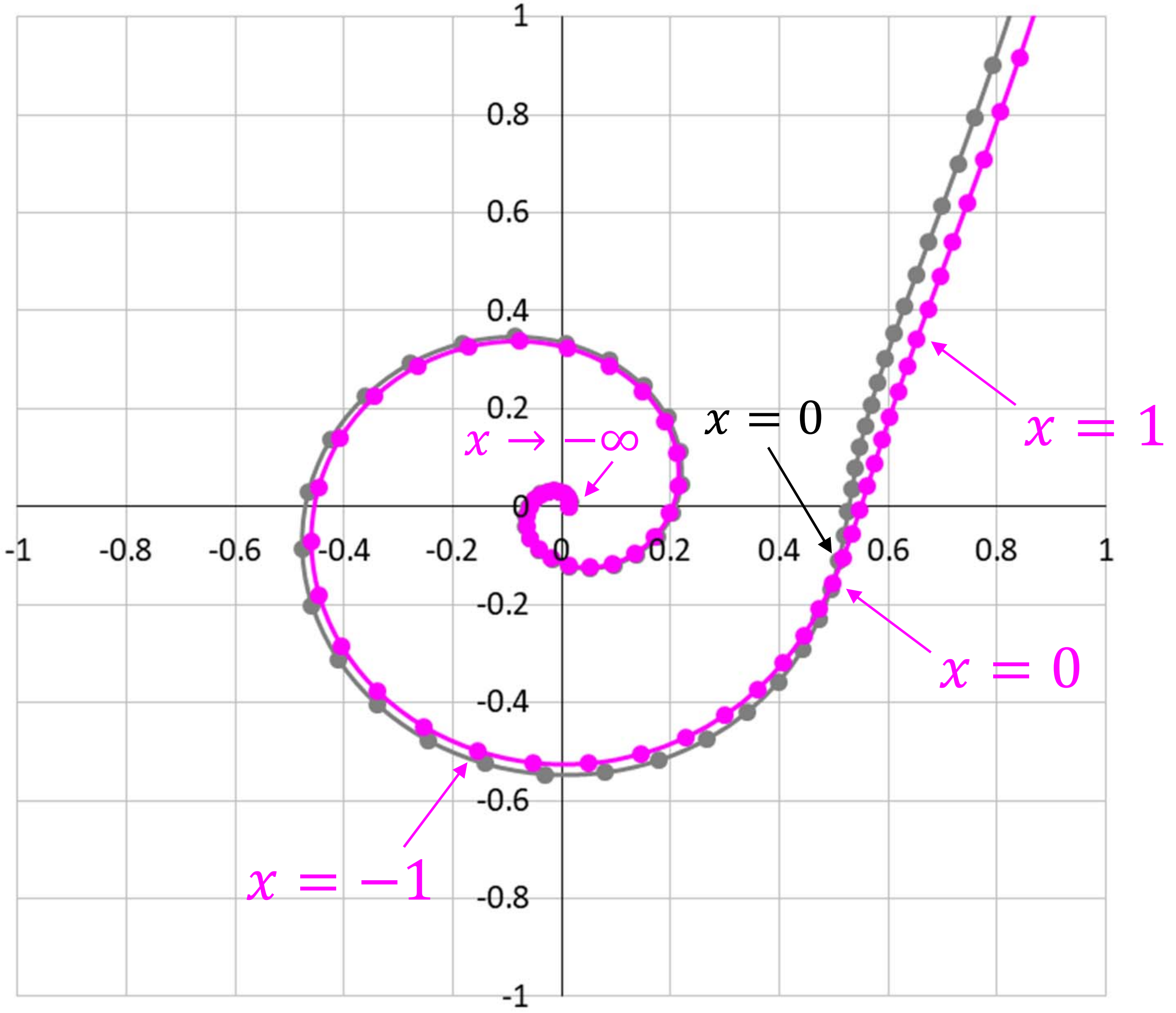
$$= 0.509123980 - i0.110967695$$

となる。近似の精度はあまり良くないことがわかる。

$(x+i)!$の軌跡

$w=(x+i)!=\Gamma(1+x+i)$ の値を 0.1 刻みで計算して複素平面に表示したものを右図に示す。$x=0$ のときが $i!=\Gamma(i+1)$ である。

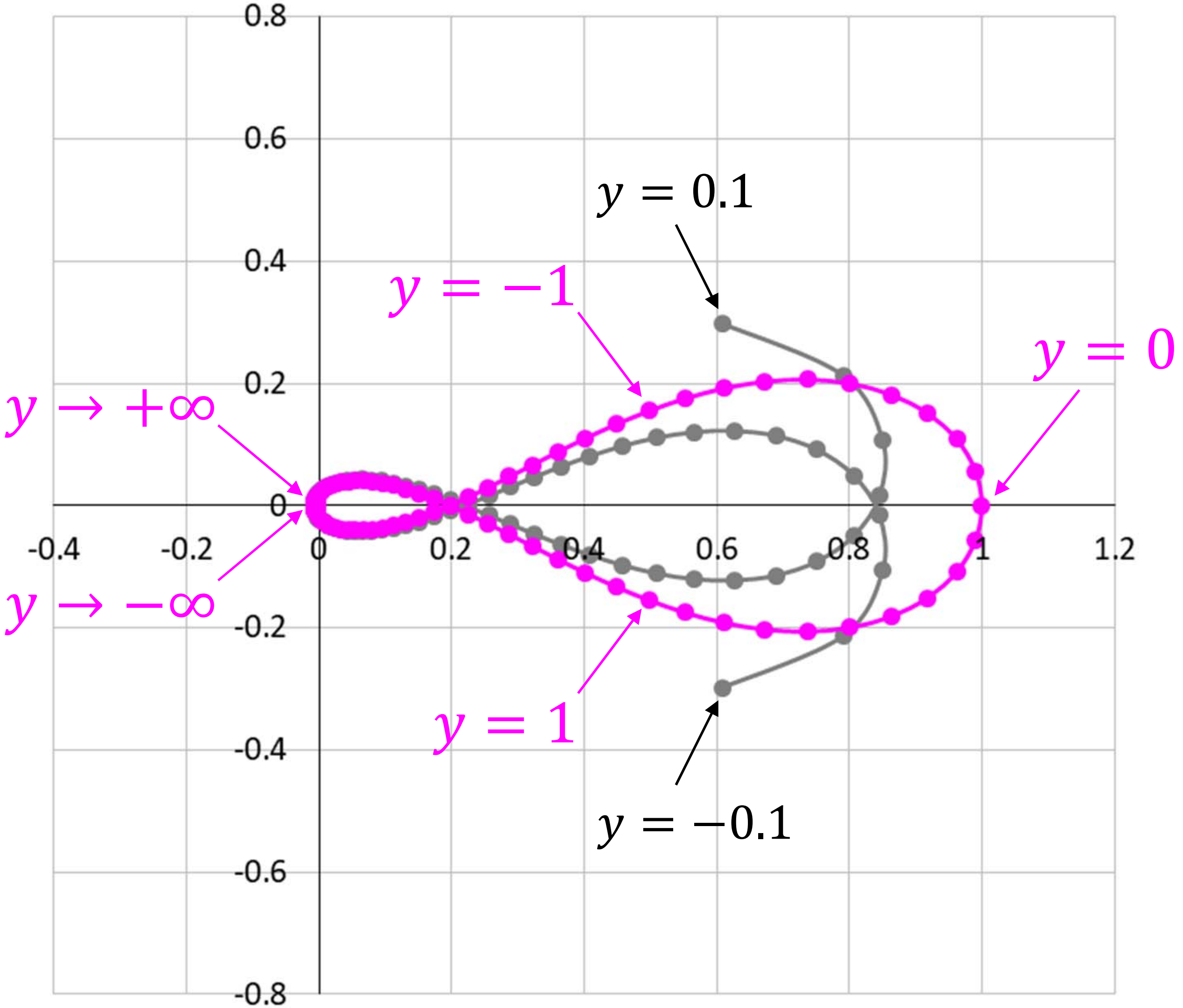
図中の灰色のプロットは、スターリングの近似による計算結果である。$x=0$ の点の位置がずれていることに注意。



$(iy)!$の軌跡

$w = (iy)! = \Gamma(1 + iy)$ の値を 0.1 刻みで計算して複素平面に表示したものを右図に示す。$y = 1$ のときが $i! = \Gamma(i + 1)$ である。

図中の灰色のプロットは、スターリングの近似による計算結果である。$y = 0$ では 0^0 が定まらないので、値が求められないことに注意。



ガンマ関数の乗積表示

ガンマ関数の積分表示より

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\int_0^{m} t^{z-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^{m}\mathrm{d}t$$

$t = mu$ と変数変換すると、$\mathrm{d}t = m\mathrm{d}u$ だから

$$\int_0^{m} t^{z-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^{m}\mathrm{d}t = \int_0^{1}(mu)^{z-1}(1-u)^{m}m\mathrm{d}t$$

$$= m^{z}\int_0^{1}u^{z-1}(1-u)^{m}\mathrm{d}t$$

ガンマ関数の乗積表示

$t = mu$ と変数変換すると

$$\int_0^m t^{z-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m \mathrm{d}t = m^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^m \mathrm{d}t$$

$$= m^z\left(\left[\frac{u^z}{z}(1-u)^m\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^z}{z} m(1-u)^{m-1}\mathrm{d}t\right)$$

$$= m^z \frac{m}{z}\int_0^1 u^z(1-u)^{m-1}\mathrm{d}t$$

$$= \cdots$$

$$= m^z \frac{m}{z}\cdot\frac{m-1}{z}\cdot\dots\cdot\frac{1}{z+m-1}\int_0^1 u^{z+m-1}\mathrm{d}t$$

ガンマ関数の乗積表示

$$\int_0^m t^{z-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m \mathrm{d}t = m^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^m \mathrm{d}t$$

$$= m^z \frac{m}{z}\cdot\frac{m-1}{z}\cdot\dots\cdot\frac{1}{z+m-1}\int_0^1 u^{z+m-1}\mathrm{d}t$$

$$= m^z \frac{m}{z}\cdot\frac{m-1}{z}\cdot\dots\cdot\frac{1}{z+m-1}\left[\frac{u^{z+m}}{z+m}\right]_0^1$$

$$= m^z \frac{m}{z}\cdot\frac{m-1}{z}\cdot\dots\cdot\frac{1}{z+m-1}\cdot\frac{1}{z+m}$$

$$= \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}$$

ガンマ関数の乗積表示

ガンマ関数の積分表示より

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\int_0^m t^{z-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m \mathrm{d}t$$

$t = mu$ と変数変換すると

$$\int_0^m t^{z-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m \mathrm{d}t = \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}$$

だから

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^m (z+k)}$$

となり、ガンマ関数の乗積表示を得る。

階乗の乗積表示

正の整数 n に対して、$m \gg n$ となる m を用いて

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)n$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)n(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot m(m+1) \cdot \cdots \cdot (m+n)}{(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot m(m+1) \cdot \cdots \cdot (m+n)}$$

$$\approx \frac{m!\, m^n}{(n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot \ (n+m)} = \frac{m!\, m^n}{\prod_k^m (n+k)}$$

これが正の整数 n だけでなく、任意の実数 x、さらには複素数 z に対しても成り立つとすると

$$z! = \lim_{m \to \infty} \frac{m!\, m^z}{\prod_k^m (z+k)}$$

ガンマ関数の相反公式

ガンマ関数の乗積表示 $\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^{m}(z+k)}$ より

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)\cdot(-z)\Gamma(-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z)$$

$$= -z\left(\lim_{m\to\infty} \frac{m^z m!}{\prod_{k=0}^{m}(z+k)}\right)\left(\lim_{m\to\infty} \frac{m^{-z} m!}{\prod_{k=0}^{m}(-z+k)}\right)$$

$$= -z\left(\lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{m} k}{z\prod_{k=1}^{m}(z+k)}\right)\left(\lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{m} k}{-z\prod_{k=1}^{m}(-z+k)}\right)$$

$$= \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k}{z+k}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k}{-z+k} = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2-z^2}$$

ガンマ関数の相反公式

ガンマ関数の乗積表示より

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2-z^2}$$

ここで、正弦関数の乗積表示

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) = \pi z\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-z^2}{k^2}$$

を用いると

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

を得る。これをガンマ関数の相反公式という。

正弦関数の乗積表示

$\sin \pi z = 0$ の解は $z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ だから、A を定数として

$$\sin \pi z = Az \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

と展開できる。ここで、

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

だから、$A = \pi$ である。ゆえに、

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

となり、正弦関数の乗積表示を得る。

<u>余談：自然数の逆数の2乗和</u>

正弦関数の乗積表示の左辺をマクローリン展開すると

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \cdots$$

いっぽう、右辺は

$$\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \pi z \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2} + \cdots\right)$$

となるから、z^3 の係数を比較すると

$$-\frac{\pi^3}{3!} = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

スターリングの近似

ガンマ関数の積分表示より

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t+n\log t}\mathrm{d}t$$

ここで、$f(t) = t - n\log t$ とおき、

$$f'(t) = 1 - \frac{n}{t},\quad f''(t) = \frac{n}{t^2},\quad f'''(t) = -\frac{2n}{t^3}$$

より、$f(t)$ を $t = n$ でテイラー展開すると

$$f(t) = f(n) + \frac{1}{2n}(t-n)^2 - \frac{1}{3n^2}(t-n)^3 + \cdots$$

スターリングの近似

ガンマ関数の積分表示より

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t+n\log t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{d}t$$

$f(t)$ を $t = n$ でテイラー展開すると

$$f(t) = f(n) + \frac{1}{2n}(t-n)^2 - \frac{1}{3n^2}(t-n)^3 + \cdots$$

$\mathrm{e}^{-f(t)}$ は $t = n$ の付近でのみ大きな値をもつから、$n \gg 1$ に対して

$$n! = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{d}t \approx \mathrm{e}^{-f(n)} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-(t-n)^2/2n}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$$

を得る。

参考文献：小野寺嘉孝「物理のための応用数学」裳華房、1988