ユニタリー行列
（2行2列）

渡邉 俊夫

ユニタリー行列の定義

複素数を要素とする正方行列 U による変換が、複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさを変えないとき、すなわち、

$$|U\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}| \qquad \cdots ①$$

が成り立つとき、U をユニタリー行列という。

下記の条件②～④は、いずれも条件①と同値である。

- U の列ベクトルは正規直交系をなす。

$$U^{\mathrm{H}}U = E \qquad \cdots ②$$

- U の行ベクトルは正規直交系をなす。

$$UU^{\mathrm{H}} = E \qquad \cdots ③$$

- U の複素共役転置は U の逆行列に等しい。

$$U^{\mathrm{H}} = U^{-1} \qquad \cdots ④$$

ユニタリー行列の要素が実数の場合は、直交行列という。

ユニタリー行列の性質

ユニタリー行列 U は、次の性質をもつ。

(a) U の行列式の絶対値は 1 である。

$$|\det U| = 1$$

(b) U の固有値の絶対値は 1 である。

$$\det(U - \lambda E) = 0$$

$$\Rightarrow \ |\lambda| = 1$$

(c) ユニタリー行列の積もユニタリー行列である。

概要

本稿では、2行2列のユニタリー行列 U について考える。
具体的には、
- ✓ ユニタリー行列の定義①～④が一致することを確認する。
- ✓ ユニタリー行列 U の一般的な表式を導く。
- ✓ ユニタリー行列の性質(a)～(c)を確かめる。

定義①

2行2列のユニタリー行列を $U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、複素ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと

$$U\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}|U\boldsymbol{x}|^2 &= (U\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}U\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \bar{a}\bar{x}+\bar{b}\bar{y} & \bar{c}\bar{x}+\bar{d}\bar{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \\ &= \left(\bar{a}\bar{x}+\bar{b}\bar{y}\right)(ax+by)+\left(\bar{c}\bar{x}+\bar{d}\bar{y}\right)(cx+dy) \\ &= (a\bar{a}+c\bar{c})x\bar{x}+(\bar{a}b+\bar{c}d)\bar{x}y+\left(a\bar{b}+c\bar{d}\right)x\bar{y}+\left(b\bar{b}+d\bar{d}\right)y\bar{y} \\ &= (|a|^2+|c|^2)|x|^2+(|b|^2+|d|^2)|y|^2 \\ &\qquad +\left(a\bar{b}+c\bar{d}\right)x\bar{y}+(\bar{a}b+\bar{c}d)\bar{x}y\end{aligned}$$

定義①

$$|U\boldsymbol{x}|^2 = (|a|^2 + |c|^2)|x|^2 + (|b|^2 + |d|^2)|y|^2$$
$$+ \left(a\bar{b} + c\bar{d}\right)x\bar{y} + (\bar{a}b + \bar{c}d)\bar{x}y$$

いっぽう

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = (\bar{x} \quad \bar{y})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\bar{x} + y\bar{y} = |x|^2 + |y|^2$$

だから、

$$|U\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}| \qquad \cdots ①$$

が常に成り立つ条件は

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{b} + c\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \end{cases}$$

である。

$\bar{a}b + \bar{c}d = \overline{a\bar{b} + c\bar{d}}$ だから
$a\bar{b} + c\bar{d} = 0$ ならば
$\bar{a}b + \bar{c}d = 0$ である。

定義②

$$U^{\mathrm{H}}U = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + c\bar{c} & \bar{a}b + \bar{c}d \\ a\bar{b} + c\bar{d} & b\bar{b} + d\bar{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ a\bar{b} + c\bar{d} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$U^{\mathrm{H}}U = E \qquad \cdots ②$$

が成り立つ条件は

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{b} + c\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \end{cases}$$

これは、①が成り立つ条件と同値である。

定義③

$$UU^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$UU^{\mathrm{H}} = E \qquad \cdots ③$$

が成り立つ条件は

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{c} + b\bar{d} = \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \end{cases}$$

である。

定義③

③が成り立つ条件は

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{c} + b\bar{d} = \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \end{cases}$$

である。このとき、$a\bar{c} = -b\bar{d}, \bar{a}c = -\bar{b}d$ だから

$$|a|^2|c|^2 = a\bar{a} \cdot c\bar{c} = a\bar{c} \cdot \bar{a}c = b\bar{d} \cdot \bar{b}d = b\bar{b} \cdot d\bar{d} = |b|^2(1 - |c|^2)$$

$$\therefore |b|^2 = |a|^2|c|^2 + |b|^2|c|^2 = (|a|^2 + |b|^2)|c|^2 = |c|^2$$

同様に

$$|a|^2|c|^2 = a\bar{a} \cdot c\bar{c} = a\bar{c} \cdot \bar{a}c = b\bar{d} \cdot \bar{b}d = b\bar{b} \cdot d\bar{d} = (1 - |a|^2)|d|^2$$

$$\therefore |d|^2 = |a|^2|c|^2 + |a|^2|d|^2 = |a|^2(|c|^2 + |d|^2) = |a|^2$$

したがって、

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$$

定義③

③が成り立つ条件は

$$\begin{cases} |a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2=1 \\ a\bar{c}+b\bar{d}=\bar{a}c+\bar{b}d=0 \end{cases}$$

である。このとき、$\bar{b}d=-\bar{a}c, \bar{a}c=-\bar{b}d$ だから

$$a\bar{b}+c\bar{d}=-a\frac{\bar{a}c}{d}-\frac{\bar{b}d}{\bar{a}}\bar{d}=-\frac{|a|^2\bar{a}c+\bar{b}d|d|^2}{\bar{a}d}$$

ここで、$|d|^2=|a|^2$ を用いると

$$a\bar{b}+c\bar{d}=-\frac{|a|^2\left(\bar{a}c+\bar{b}d\right)}{\bar{a}d}=0$$

これより、次式も成り立つ。

$$\bar{a}b+\bar{c}d=\overline{a\bar{b}+c\bar{d}}=0$$

定義③

③が成り立つ条件は

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{c} + b\bar{d} = \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \end{cases}$$

である。このとき、

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{b} + c\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \end{cases}$$

これは、①が成り立つ条件と同値である。

表式

$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がユニタリー行列であるとき

$$\begin{cases} |a|^2+|c|^2=|b|^2+|d|^2=1 \\ a\bar{b}+c\bar{d}=\bar{a}b+\bar{c}d=0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、$\dfrac{d}{\bar{a}}=-\dfrac{b}{\bar{c}}=\kappa$ とおくと、$b=-\kappa\bar{c}, d=\kappa\bar{a}$ と表せるから

$$|b|^2+|d|^2=b\bar{b}+d\bar{d}=\kappa c\cdot\bar{\kappa}\bar{c}+\kappa a\cdot\bar{\kappa}\bar{a}=\kappa\bar{\kappa}(a\bar{a}+c\bar{c})$$

$$=|\kappa|^2(|a|^2+|c|^2)=|\kappa|^2=1$$

よって、κ は絶対値が 1 の複素数であり、偏角を φ として $\kappa=\mathrm{e}^{i\varphi}$ とおくと

$$b=-\kappa\bar{c}=-\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c}, \qquad d=\kappa\bar{a}=\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}$$

表式

$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$がユニタリー行列であるとき

$$b=-\kappa\bar{c}=-\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c},\qquad d=\kappa\bar{a}=\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}$$

だから

$$U=\begin{pmatrix} a & -\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} \\ c & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|c|^2=1$$

と表せる。

性質(a)

2行2列のユニタリー行列は

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} \\ c & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|c|^2=1$$

と表せるから、その行列式は

$$\begin{aligned}\det U &= ad-bc = a\cdot\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}+\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c}\cdot c=\mathrm{e}^{i\varphi}(a\bar{a}+c\bar{c}) \\ &= \mathrm{e}^{i\varphi}(|a|^2+|c|^2)=\mathrm{e}^{i\varphi}\end{aligned}$$

であり、その絶対値は

$$|\det U|=\left|\mathrm{e}^{i\varphi}\right|=1$$

である。

定義④

2行2列のユニタリー行列

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} \\ c & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|c|^2=1$$

の行列式は $\det U=ad-bc=\mathrm{e}^{i\varphi}$ であるから、U の逆行列は

$$U^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{\mathrm{e}^{i\varphi}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ -\mathrm{e}^{-i\varphi}c & \mathrm{e}^{-i\varphi}a \end{pmatrix}=\overline{\begin{pmatrix} a & c \\ -\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} \end{pmatrix}}=\overline{U^{\mathrm{T}}}=U^{\mathrm{H}}$$

となる。すなわち、

$$U^{\mathrm{H}}=U^{-1} \qquad \cdots ④$$

であり、U の複素共役転置は U の逆行列に等しい。

性質(b)

2行2列のユニタリー行列

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} \\ c & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|c|^2=1$$

の固有値をλとすると

$$\det(U-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0$$

より

$$\begin{aligned}(a-\lambda)(d-\lambda)-bc &= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)\\ &= \lambda^2-\left(a+\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}\right)\lambda+\left(a\cdot\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}+\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c}\cdot c\right)\\ &= \lambda^2-\left(a+\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}\right)\lambda+\mathrm{e}^{i\varphi}(a\bar{a}+c\bar{c})\\ &= \lambda^2-\left(a+\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}\right)\lambda+\mathrm{e}^{i\varphi}=0\end{aligned}$$

性質(b)

2行2列のユニタリー行列 U の固有値 λ は

$$\lambda^2 - \left(a + \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}\right)\lambda + \mathrm{e}^{i\varphi} = 0$$

の解である。ここで、$\lambda = \mu\mathrm{e}^{i\varphi/2}$ とおくと

$$\mu^2\mathrm{e}^{i\varphi} - \left(a + \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}\right)\mu\mathrm{e}^{i\varphi/2} + \mathrm{e}^{i\varphi} = 0$$

$$\mu^2 - \left(a + \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a}\right)\mu\mathrm{e}^{-i\varphi/2} + 1 = 0$$

$$\mu^2 - \left(\mathrm{e}^{-i\varphi/2}a + \mathrm{e}^{i\varphi/2}\bar{a}\right)\mu + 1 = 0$$

さらに、$r = \dfrac{\mathrm{e}^{-i\varphi/2}a + \mathrm{e}^{i\varphi/2}\bar{a}}{2} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-i\varphi/2}a\right)$ とおくと、r は実数であり

$$\mu^2 - 2r\mu + 1 = 0$$

性質(b)

$$\mu^2 - 2r\mu + 1 = 0$$

の解は $\mu = r \pm \sqrt{r^2 - 1}$ であるが、

$$r^2 = \left[\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-i\varphi/2}a\right)\right]^2 \leq \left|\mathrm{e}^{-i\varphi/2}a\right|^2 = |a|^2 = 1 - |c|^2 \leq 1$$

に注意すると、$\mu = r \pm i\sqrt{1 - r^2}$ であるから

$$|\mu|^2 = r^2 + (1 - r^2) = 1$$

したがって、

$$|\lambda|^2 = \left|\mu\mathrm{e}^{i\varphi/2}\right|^2 = |\mu|^2 = 1$$

すなわち、ユニタリー行列 U の固有値 λ の絶対値は 1 である。

性質(c)

2行2列のユニタリー行列の積は

$$U_1U_2=\begin{pmatrix}a_1 & -e^{i\varphi_1}\overline{c_1}\\ c_1 & e^{i\varphi_1}\overline{a_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & -e^{i\varphi_2}\overline{c_2}\\ c_2 & e^{i\varphi_2}\overline{a_2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1a_2-e^{i\varphi_1}\overline{c_1}c_2 & -e^{i\varphi_2}a_1\overline{c_2}-e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\overline{c_1}\,\overline{a_2}\\ c_1a_2+e^{i\varphi_1}\overline{a_1}c_2 & -e^{i\varphi_2}c_1\overline{c_2}+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\overline{a_1}\,\overline{a_2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1a_2-e^{i\varphi_1}\overline{c_1}c_2 & -e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\left(\overline{c_1}\,\overline{a_2}+e^{-i\varphi_1}a_1\overline{c_2}\right)\\ c_1a_2+e^{i\varphi_1}\overline{a_1}c_2 & e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\left(\overline{a_1}\,\overline{a_2}-e^{-i\varphi_1}c_1\overline{c_2}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1a_2-e^{i\varphi_1}\overline{c_1}c_2 & -e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\overline{\left(c_1a_2+e^{i\varphi_1}\overline{a_1}c_2\right)}\\ c_1a_2+e^{i\varphi_1}\overline{a_1}c_2 & e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\overline{\left(a_1a_2-e^{i\varphi_1}\overline{c_1}c_2\right)}\end{pmatrix}$$

となり、ユニタリー行列である。

特殊ユニタリー行列

2行2列のユニタリー行列 $U=\begin{pmatrix} a & -\mathrm{e}^{i\varphi}\bar{c} \\ c & \mathrm{e}^{i\varphi}\bar{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2+|c|^2=1$ の

行列式は $\det U=\mathrm{e}^{i\varphi}$ であるから、$\varphi=0$ のとき $\det U=1$ となる。

行列式が 1 のユニタリー行列を**特殊ユニタリー行列**という。
2行2列の場合は

$$U=\begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|c|^2=1$$

の形で表せる。

$$U=\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

はその一例である。

光回路の方向性結合器の伝達行列はこの形であり、特殊ユニタリー行列になっている。