対称行列と二次曲線（2行2列）

渡邉 俊夫

概要

実数を要素とする正方行列 A の転置が A 自身に等しいとき、すなわち、

$$A^{\mathrm{T}} = A$$

が成り立つとき、A を対称行列という。

対称行列は、次の性質をもつ。

(a) 対称行列の固有値は実数である。

(b) 対称行列の固有ベクトルは直交する。

(c) 対称行列は直交行列で対角化できる。

本稿では、2行2列の対称行列について上記の性質(a)～(c)を確かめる。
また、二次曲線との関係についても述べる。

性質(a):固有値

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これが $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつには $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

2行2列の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

の固有値を λ とすると

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2}$$

性質(a)：固有値

2行2列の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

の固有値は

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

であり、$D = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ だから、実数である。

性質(b):固有ベクトル

2行2列の対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

の固有値 λ に対する固有ベクトルは

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$ の形で表される(k は任意の実数)。

性質(b):固有ベクトル

2行2列の対称行列の2つの固有値 λ_1, λ_2 は

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

の解だから

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d, \quad \lambda_1\lambda_2 = ad - b^2$$

である。したがって、2つの固有ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}$ の内積は

$$b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = b^2 + \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)a + a^2$$

$$= b^2 + ad - b^2 - (a+d)a + a^2 = 0$$

となり、2つの固有ベクトルは直交している。

性質(c):対角化

一般に、$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$M^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}$ の行列式を

$$\det P=b(\lambda_2-a)-b(\lambda_1-a)=b(\lambda_2-\lambda_1)=\Delta$$

とすると、P の逆行列は $P^{-1}=\dfrac{1}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{pmatrix} \lambda_2-a & -b \\ -(\lambda_1-a) & b \end{pmatrix}$ だから

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_2-a & -b \\ -(\lambda_1-a) & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1-a & \lambda_2-a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_2-a & -b \\ -(\lambda_1-a) & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\lambda_1 & b\lambda_2 \\ b^2+d(\lambda_1-a) & b^2+d(\lambda_2-a) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{b}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_2-a)-b^2-d(\lambda_1-a) & \lambda_2(\lambda_2-a)-b^2-d(\lambda_2-a) \\ -\lambda_1(\lambda_1-a)+b^2+d(\lambda_1-a) & -(\lambda_1-a)\lambda_2+b^2+d(\lambda_2-a) \end{pmatrix}$$

性質(c):対角化

ここで、λ_1, λ_2 は $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$ の解であり、
$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d, \lambda_1\lambda_2 = ad - b^2$ だから

$$\lambda_1(\lambda_2 - a) - b^2 - d(\lambda_1 - a) = \lambda_1\lambda_2 - (a+d)\lambda_1 + ad - b^2$$
$$= \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = 2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_1$$

$$\lambda_2(\lambda_2 - a) - b^2 - d(\lambda_2 - a) = {\lambda_2}^2 - (a+d)\lambda_2 + ad - b^2 = 0$$

$$-\lambda_1(\lambda_1 - a) + b^2 + d(\lambda_1 - a) = -{\lambda_1}^2 + (a+d)\lambda_1 - ad + b^2$$
$$= -\left({\lambda_1}^2 - (a+d)\lambda_1 + ad - b^2\right) = 0$$

$$-(\lambda_1 - a)\lambda_2 + b^2 + d(\lambda_2 - a) = -\lambda_1\lambda_2 + (a+d)\lambda_2 - ad + b^2$$
$$= -\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 = -2\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2$$

性質(c):対角化

以上より

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\lambda_2-a & -b\\ -(\lambda_1-a) & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & b\\ \lambda_1-a & \lambda_2-a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{b}{\Delta}\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_2-a)-b^2-d(\lambda_1-a) & \lambda_2(\lambda_2-a)-b^2-d(\lambda_2-a)\\ -\lambda_1(\lambda_1-a)+b^2+d(\lambda_1-a) & -(\lambda_1-a)\lambda_2+b^2+d(\lambda_2-a)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\begin{pmatrix}(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_1 & 0\\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

したがって、対称行列 A は行列 P で対角化できる。

性質(c):対角化

正方行列 R の列ベクトルが正規直交系をなし、$R^{\mathrm{T}}R = E$が成り立つとき、R を直交行列という。

$$P = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$ はこのままでは直交行列ではないが、

$$k_1{}^2 = \frac{1}{b^2 + (\lambda_1 - a)^2} = \frac{1}{p^2 + r^2}$$

$$k_2{}^2 = \frac{1}{b^2 + (\lambda_2 - a)^2} = \frac{1}{q^2 + s^2}$$

とすれば、$P' = \begin{pmatrix} k_1 p & k_2 q \\ k_1 r & k_2 s \end{pmatrix}$ は直交行列になる。

性質(c):対角化

このとき、$\Delta = ps - qr, \kappa = k_1/k_2$ として

$$P'^{-1}AP' = \frac{1}{k_1k_2\Delta}\begin{pmatrix} k_2s & -k_2q \\ -k_1r & k_1p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1p & k_2q \\ k_1r & k_2s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s & -q \\ -\kappa r & \kappa p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q/\kappa \\ r & s/\kappa \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s & -q \\ -\kappa r & \kappa p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ap + br & (aq + bs)/\kappa \\ bp + dr & (bq + ds)/\kappa \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s(ap + br) - q(bp + dr) & \big(s(aq + bs) - q(bq + ds)\big)/\kappa \\ \kappa\big(-r(ap + br) + p(bp + dr)\big) & -r(aq + bs) + p(bq + ds) \end{pmatrix}$$

性質(c):対角化

ここで、

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s(ap+br)-q(bp+dr) & s(aq+bs)-q(bq+ds) \\ -r(ap+br)+p(bp+dr) & -r(aq+bs)+p(bq+ds) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

より

$$P'^{-1}AP'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

したがって、対称行列 A は直交行列 P' で対角化できる。

定値性

対称行列 A の固有値がすべて正の実数であるとき、A を正定値行列という。

A の固有値がすべて非負の実数であるとき、A を半正定値行列という。

A の固有値がすべて負の実数であるとき、A を負定値行列という。

A の固有値がすべて非正の実数であるとき、A を半負定値行列という。

二次形式

対称行列 A、列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ の内積

$$\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x}$$

を $\boldsymbol{x}$ の二次形式という。

A が正定値行列のとき、任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle > 0$ である。
A が半正定値行列のとき、任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ である。
A が負定値行列のとき、任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle < 0$ である。
A が半負定値行列のとき、任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle \leq 0$ である。

定値性(2行2列)

2行2列の対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ が正定値行列であるための条件は

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

の2つの解が正の実数であることから

$$a + d > 0, \quad ad - b^2 > 0$$

である。これより

$$a > 0, \quad d > 0, \quad ad - b^2 > 0$$

となる。

$a = 0$ は $ad - b^2 > 0$ より不可。
$a < 0$ とすると、$ad - b^2 > 0$ より $d < 0$ となるが、
これは $a + d > 0$ に反する。

二次形式(2変数)

2変数の二次形式は、2行2列の対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ と列ベクトル

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \end{pmatrix} \\
&= ax^2 + 2bxy + dy^2
\end{aligned}
$$

と表される。

二次形式（2変数）

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle &= ax^2 + 2bxy + dy^2 \\
&= a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 - \frac{b^2y^2}{a} + dy^2 \\
&= a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{ad - b^2}{a}y^2
\end{aligned}
$$

だから、任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle > 0$ となるのは

$$a > 0, \quad ad - b^2 > 0$$

のときである。これは $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ が正定値行列であるための条件と同じである。

二次形式(2変数)

対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ は直交行列 R を用いて

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\Lambda$$

と対角化できるから、座標変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}'=R^{-1}\boldsymbol{x}=R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}=R\boldsymbol{x}'$$

によって、二次形式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} ax^2+2bxy+dy^2 &= \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle R\boldsymbol{x}', AR\boldsymbol{x}' \rangle = (R\boldsymbol{x}')^{\mathrm{T}} AR\boldsymbol{x}' \\ &= \boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} AR\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} R^{-1} AR\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} \Lambda \boldsymbol{x}' \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \end{aligned}$$

二次曲線

したがって、二次曲線

$$ax^2 + 2bxy + dy^2 = 1$$

は、直交行列 R による座標変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$$

の形で表される。ここで、λ_1, λ_2 は対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ の固有値であり、$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$ の解である。

固有値 λ_1, λ_2 がともに正ならば、すなわち、行列 A が正定値（$a > 0,$ $d > 0, ad - b^2 > 0$）ならば、この二次曲線は楕円である。

また、λ_1, λ_2 が異符号ならば、この二次曲線は双曲線である。

二次曲線

二次曲線 $ax^2 + 2bxy + dy^2 = 1$ を $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$ の形で表すための回転行列 R は

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 b & k_2 b \\ k_1(\lambda_1 - a) & k_2(\lambda_2 - a) \end{pmatrix}$$

より

$$\cos\theta = k_1 b = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 - a)^2}}$$

$$\sin\theta = k_1(\lambda_1 - a) = \frac{(\lambda_1 - a)}{\sqrt{b^2 + (\lambda_1 - a)^2}}$$

二次曲線

これより

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{2b(\lambda_1 - a)}{b^2 - (\lambda_1 - a)^2}$$

$$= \frac{2b(\lambda_1 - a)}{b^2 - \left({\lambda_1}^2 - 2a\lambda_1 + a^2\right)}$$

ここで、λ_1 は $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$ の解だから

$$\tan 2\theta = \frac{2b(\lambda_1 - a)}{b^2 - \left((a+d)\lambda_1 - ad + b^2 - 2a\lambda_1 + a^2\right)}$$

$$= \frac{2b(\lambda_1 - a)}{(a-d)\lambda_1 - a^2 + ad} = \frac{2b(\lambda_1 - a)}{(a-d)(\lambda_1 - a)} = \frac{2b}{a-d}$$

二次曲線

したがって、二次曲線 $ax^2+2bxy+dy^2=1$ は

$$\tan 2\theta = \frac{2b}{a-d}$$

として、座標変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$ の形で表される。

特に、$a=d$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ だから、曲線 $ax^2+2bxy+ay^2=1$ は

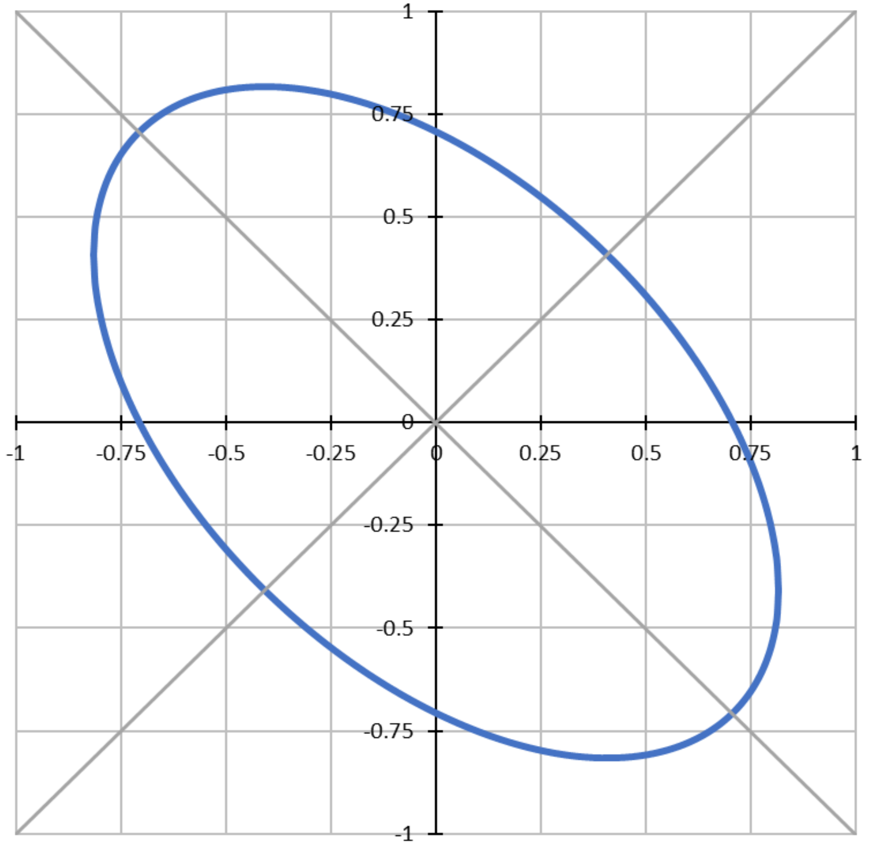
座標軸の $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転により

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = (a+b)x'^2 + (a-b)y'^2 = 1$$

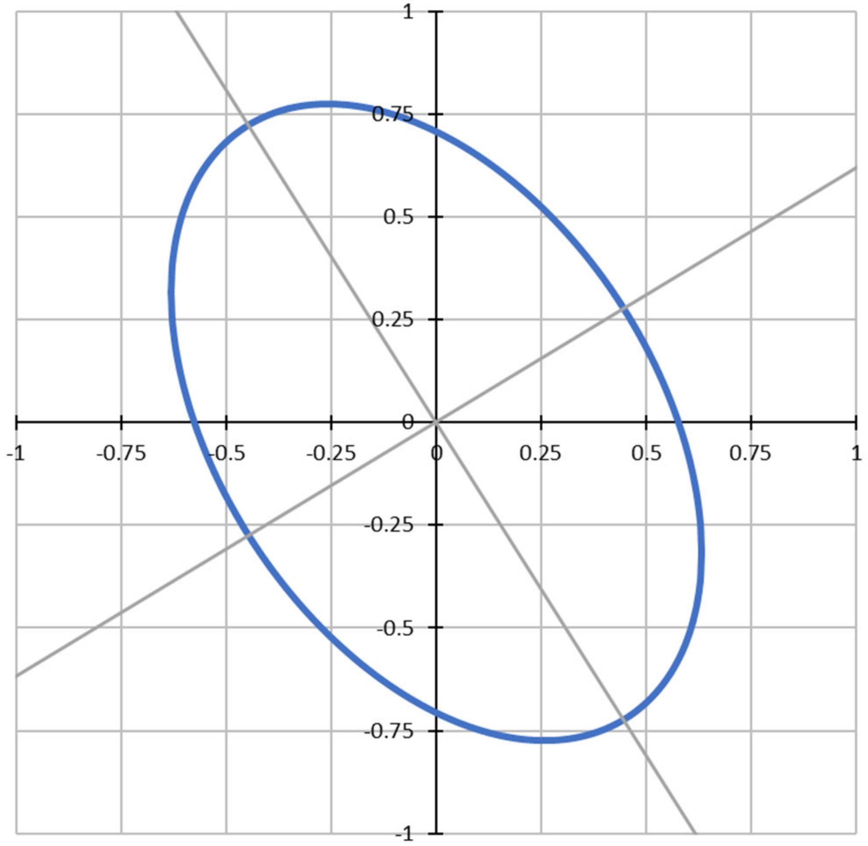
と表される。

二次曲線

二次曲線 $ax^2 + 2bxy + dy^2 = 1$ が楕円の場合の例を示す。



$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$



$3x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$