直交行列
（2行2列）

渡邉 俊夫

直交行列の定義

実数を要素とする正方行列 R の列ベクトルが正規直交系をなすとき、
すなわち、

$$R^{\mathrm{T}}R = E \qquad \cdots ①$$

が成り立つとき、R を直交行列という。

下記の条件②～④は、いずれも条件①と同値である。

- R の行ベクトルは正規直交系をなす。

$$RR^{\mathrm{T}} = E \qquad \cdots ②$$

- 行列 R による変換は複素ベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさを変えない。

$$|R\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}| \qquad \cdots ③$$

- R の転置は R の逆行列に等しい。

$$R^{\mathrm{T}} = R^{-1} \qquad \cdots ④$$

直交行列の要素が複素数の場合は、ユニタリー行列という。
（転置は複素共役転置になる）

直交行列の性質

直交行列 R は、次の性質をもつ。

(a) R の行列式は 1 または -1である。

$$\det R = \pm 1$$

(b) R の固有値の絶対値は 1 である。

$$\det(R - \lambda E) = 0$$

$$\Rightarrow \ |\lambda| = 1$$

R の固有値 λ は実数とは限らず、一般には複素数である。

(c) 直交行列の積も直交行列である。

概要

本稿では、2行2列の直交行列 R について考える。

具体的には、

- ✓ 直交行列の定義①～④が一致することを確認する。
- ✓ 直交行列 R の一般的な表式を導く。
- ✓ 直交行列の性質(a)～(c)を確かめる。

定義①

2行2列の直交行列を $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$R^{\mathrm{T}}R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$R^{\mathrm{T}}R = E \qquad \cdots ①$$

が成り立つ条件は

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

定義②

$$RR^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$RR^{\mathrm{T}} = E \qquad \cdots②$$

が成り立つ条件は

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

である。

定義②

②が成り立つ条件は

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

である。このとき、$ac = -bd$ だから

$$a^2c^2 = b^2d^2 = b^2(1 - c^2)$$

$$\therefore b^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)c^2 = c^2$$

同様に

$$a^2c^2 = b^2d^2 = (1 - a^2)d^2$$

$$\therefore d^2 = a^2c^2 + a^2d^2 = a^2(c^2 + d^2) = a^2$$

したがって、

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$$

定義②

②が成り立つ条件は

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

である。このとき、$bd = -ac$ だから

$$ab + cd = -a\frac{ac}{d} - \frac{bd}{a}d = -\frac{a^3c + bd^3}{ad}$$

ここで、$d^2 = a^2$ を用いると

$$ab + cd = -\frac{a^3c + a^2bd}{ad} = -\frac{a^2(ac + bd)}{ad} = 0$$

定義②

②が成り立つ条件は

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$$

である。このとき、

$$\begin{cases} a^2+c^2=b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

これは、①が成り立つ条件と同値である。

定義③

2行2列の直交行列を $R=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、複素ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと

$$R\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} |R\boldsymbol{x}|^2 = (R\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{x} &= (ax+by \quad cx+dy)\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \\ &= (ax+by)^2+(cx+dy)^2 \\ &= (a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+(c^2x^2+2cdxy+d^2y^2) \\ &= (a^2+c^2)x^2+(b^2+d^2)y^2+2(ab+cd)xy \end{aligned}$$

定義③

$$|R\boldsymbol{x}|^2 = (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy$$

いっぽう

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (x \quad y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

だから、

$$|R\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}| \qquad \cdots ③$$

が常に成り立つ条件は

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

である。これは、①が成り立つ条件と同値である。

表式

$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、$\dfrac{d}{a} = -\dfrac{b}{c} = \kappa$ とおくと、$b = -\kappa c, d = \kappa a$ と表せるから

$$b^2 + d^2 = \kappa^2 c^2 + \kappa^2 a^2 = \kappa^2 (a^2 + c^2) = \kappa^2 = 1$$

$$\therefore \kappa = \pm 1$$

よって、

$$b = -\kappa c = \mp c, \qquad d = \kappa a = \pm a \qquad \text{（複号同順）}$$

表式

$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき

$$b = -\kappa c = \mp c, \qquad d = \kappa a = \pm a$$ （複号同順）

だから、$\kappa = 1$ のとき

$$R = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1$$

$\kappa = -1$ のとき

$$R = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1$$

と表せる。

性質(a)

2行2列の直交行列は、$\kappa = \pm 1$ として

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\kappa c \\ c & \kappa a \end{pmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1$$

と表せるから、その行列式は

$$\det R = ad - bc = a \cdot \kappa a + \kappa c \cdot c$$

$$= \kappa(a^2 + c^2) = \kappa = \pm 1$$

である。

定義④

2行2列の直交行列

$$R=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -\kappa c\\ c & \kappa a\end{pmatrix},\quad a^2+c^2=1,\quad \kappa=\pm 1$$

の行列式は $\det R = ad-bc=\kappa(a^2+c^2)=\kappa$ だから、R の逆行列は

$$R^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{\kappa}\begin{pmatrix}\kappa a & \kappa c\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\kappa^2}\begin{pmatrix}\kappa^2 a & \kappa^2 c\\ -\kappa c & \kappa a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ -\kappa c & \kappa a\end{pmatrix}=R^{\mathrm{T}}$$

$\kappa=\pm 1$ より $\kappa^2=1$

となる。すなわち、

$$R^{\mathrm{T}}=R^{-1} \qquad \cdots ④$$

であり、R の転置は R の逆行列に等しい。

性質(b)

2行2列の直交行列

$$R=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -\kappa c \\ c & \kappa a \end{pmatrix},\quad a^2+c^2=1,\quad \kappa=\pm 1$$

の固有値を λ とすると

$$\det(R-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0$$

より

$$\begin{aligned}(a-\lambda)(d-\lambda)-bc &= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)\\ &= \lambda^2-(a+\kappa a)\lambda+(a\cdot\kappa a+\kappa c\cdot c)\\ &= \lambda^2-(1+\kappa)a\lambda+\kappa(a^2+c^2)\\ &= \lambda^2-(1+\kappa)a\lambda+\kappa=0\end{aligned}$$

性質(b)

2行2列の直交行列 R の固有値 λ は、$\kappa = \pm 1$ として

$$\lambda^2 - (1+\kappa)a\lambda + \kappa = 0$$

の解である。

$\kappa = 1$ のとき

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$$

の解は $\lambda = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ であるが、

$$a^2 = 1 - c^2 \leq 1$$

に注意すると、$\lambda = a \pm i\sqrt{1 - a^2}$ であり、その絶対値は

$$|\lambda|^2 = a^2 + (1 - a^2) = 1$$

$$\therefore |\lambda| = 1$$

性質(b)

2行2列の直交行列 R の固有値 λ は、$\kappa = \pm 1$ として

$$\lambda^2 - (1+\kappa)a\lambda + \kappa = 0$$

の解である。

$\kappa = -1$ のとき

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \therefore \lambda = \pm 1$$

であり、その絶対値は

$$|\lambda| = 1$$

性質(c)

2行2列の直交行列の積は

$$R_1R_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -\kappa_1 c_1 \\ c_1 & \kappa_1 a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & -\kappa_2 c_2 \\ c_2 & \kappa_2 a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - \kappa_1 c_1 c_2 & -\kappa_2 a_1 c_2 - \kappa_1\kappa_2 c_1 a_2 \\ c_1 a_2 + \kappa_1 a_1 c_2 & -\kappa_2 c_1 c_2 + \kappa_1\kappa_2 a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - \kappa_1 c_1 c_2 & -{\kappa_1}^2\kappa_2 a_1 c_2 - \kappa_1\kappa_2 c_1 a_2 \\ c_1 a_2 + \kappa_1 a_1 c_2 & -{\kappa_1}^2\kappa_2 c_1 c_2 + \kappa_1\kappa_2 a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$\kappa_1 = \pm 1$ より ${\kappa_1}^2 = 1$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - \kappa_1 c_1 c_2 & -\kappa_1\kappa_2 (c_1 a_2 + \kappa_1 a_1 c_2) \\ c_1 a_2 + \kappa_1 a_1 c_2 & \kappa_1\kappa_2 (a_1 a_2 - \kappa_1 c_1 c_2) \end{pmatrix}$$

となる。$(\kappa_1\kappa_2)^2 = {\kappa_1}^2{\kappa_2}^2 = 1$ だから、これは直交行列である。

特殊直交行列($\kappa = 1$)

2行2列の直交行列 $R = \begin{pmatrix} a & -\kappa c \\ c & \kappa a \end{pmatrix}$, $a^2 + c^2 = 1$, $\kappa = \pm 1$ は
$\kappa = 1$ のとき、行列式 $\det R = \kappa = 1$ となる。

行列式が 1 の直交行列を**特殊直交行列**という。
2行2列の場合は

$$R = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1$$

より、$a = \cos\theta$ として

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の形で表せる。これは、原点のまわりの θ **回転**を表す行列である。

行列 R による変換で
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$
に移る。

90° 回転は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、180° 回転は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

特殊直交行列($\kappa = 1$):固有値

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値は

$$\det(R - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda + 1 = 0$$

より

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \cos\theta \pm i\sin\theta = \mathrm{e}^{\pm i\theta}$$

である。

特殊直交行列($\kappa = 1$):固有ベクトル

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値 $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$ に対する固有ベクトルは

$$R - \lambda E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix} = -i\sin\theta \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$(R - \lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\sin\theta \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ y = -ix$$

だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ である。

特殊直交行列($\kappa = 1$):固有ベクトル

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値 $\lambda = \cos\theta - i\sin\theta = \mathrm{e}^{-i\theta}$ に対する固有ベクトルは

$$R - \lambda E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} = i\sin\theta \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$(R - \lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i\sin\theta \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore y = ix$$

だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ である。

直交行列$(\kappa = -1)$

2行2列の直交行列 $R = \begin{pmatrix} a & -\kappa c \\ c & \kappa a \end{pmatrix}$, $a^2 + c^2 = 1$, $\kappa = \pm 1$ は

$\kappa = -1$ のとき、行列式 $\det R = \kappa = -1$ となる。

このとき

$$R = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1$$

より、$a = \cos\theta$ として

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

の形で表せる。これは、原点を通る直線 $y = x\tan(\theta/2)$ に関する折返しを表す行列である。

行列 R による変換で

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

に移る。

x 軸に関する折返しは $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$、$y$ 軸に関する折返しは $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

直線 $y = x$ に関する折返しは $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

直交行列($\kappa = -1$):固有値

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値は

$$\begin{aligned}\det(R - \lambda E) &= \det\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta + \lambda) - \sin^2\theta \\ &= \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0\end{aligned}$$

より、$\lambda = \pm 1$ である。

直交行列($\kappa = -1$):固有ベクトル

$x\sin\theta = y(1+\cos\theta)$ からも

$$x\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = y\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore x\sin\frac{\theta}{2} = y\cos\frac{\theta}{2}$$

$$R = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

の固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$(R-\lambda E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$x(1-\cos\theta) = y\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2} = y\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore x\sin\frac{\theta}{2} = y\cos\frac{\theta}{2}$$

だから、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix}$ である(k は任意の実数)。

直交行列($\kappa = -1$):固有ベクトル

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは

$$(R - \lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$x(1+\cos\theta) = -y\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2} = -y \cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ x\cos\frac{\theta}{2} = -y\sin\frac{\theta}{2}$$

だから、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$ である(k は任意の実数)。

$x\sin\theta = -y(1-\cos\theta)$ からも

$$x \cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = -y \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ x\cos\frac{\theta}{2} = -y\sin\frac{\theta}{2}$$