# ガウス・レイリー・マクスウェル

## －1・2・3次元の正規分布－

渡邉 俊夫

# 正規分布（ガウス分布）

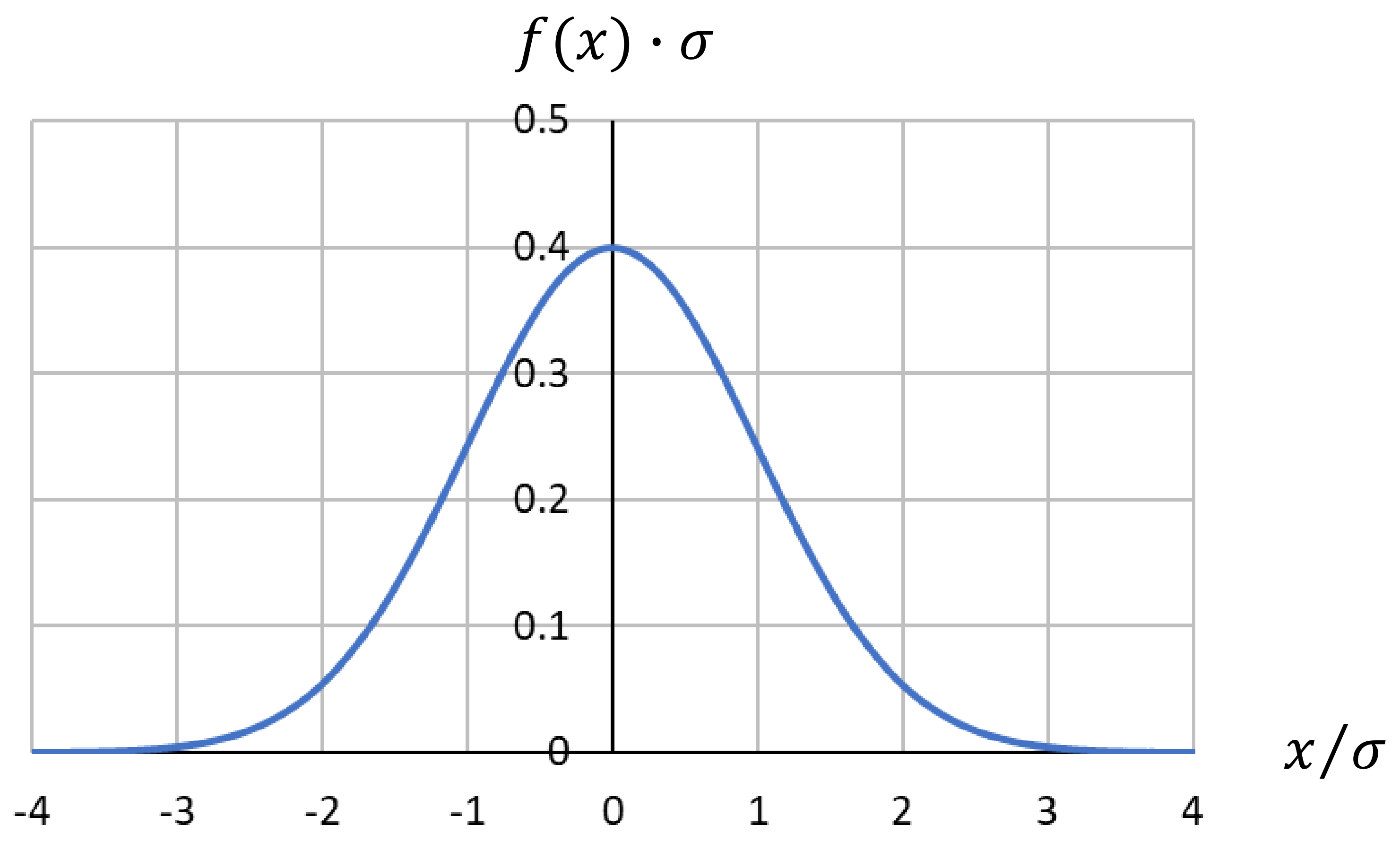
確率変数 $x$ が平均 0、分散 $\sigma^2$ の正規分布にしたがうとき、その確率密度関数は

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$$

で表される。これはガウス分布とも呼ばれる。

# 正規分布（ガウス分布）

正規分布（ガウス）分布の確率密度関数のグラフは下図のようになる。



# 正規分布(ガウス分布)

正規分布(ガウス分布)の確率密度関数は正規化されており、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 1$$

である。ここで、

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\infty}r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

$$\therefore I = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

# 半正規分布

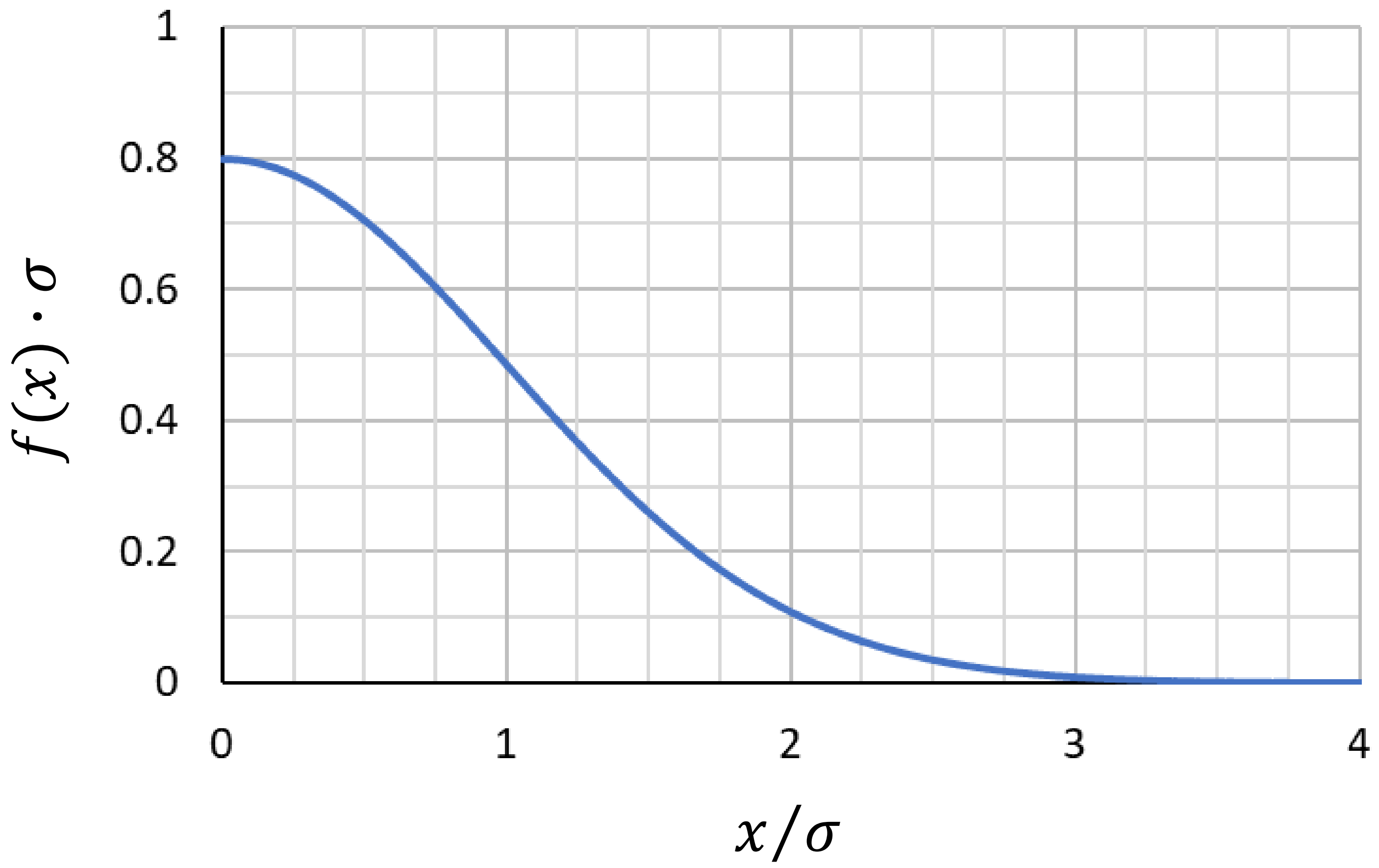
平均 $0$、分散 $\sigma^2$ の正規分布にしたがう確率変数 $x$ の絶対値 $r = |x|$ の確率密度関数は

$$f(r) = 2g(r) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

で表される。これを半正規分布という。

# 半正規分布

半正規分布の確率密度関数のグラフは下図のようになる。



# 半正規分布

半正規分布の平均値は

$$\bar{r} = \int_0^\infty rf(r)\mathrm{d}r = \int_0^\infty r \cdot \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\sigma^2\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx 0.7979\sigma$$

である。

# 半正規分布

半正規分布の2乗平均は

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 f(r)\mathrm{d}r = \int_0^\infty r^2 \cdot \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[r\cdot\left(-\sigma^2\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sigma = \sigma^2$$

である。よって、2乗平均の平方根（RMS）は $\sqrt{\overline{r^2}} = \sigma$ である。

# 半正規分布

半正規分布の中央値（メディアン）は

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\tilde{r}} f(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\tilde{r}} \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tilde{r}} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tilde{r}/\sqrt{2}\sigma} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{erf}\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\therefore \tilde{r} = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sigma \approx 0.6745\sigma$$

である。

# 2次元の正規分布

確率変数 $x, y$ が独立で、いずれも平均 $0$、分散 $\sigma^2$ の正規分布にしたがうとき、その確率密度関数は

$$f(x,y) = g(x)g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

で表される。

# 2次元の正規分布

確率変数 $x, y$ を

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

によって $r, \theta$ に変換すると

$$f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

# レイリー分布

確率変数 $r, \theta$ の確率密度関数

$$f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

を $\theta$ で積分して確率変数 $r$ の確率密度関数を求めると

$$f(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}\theta$$

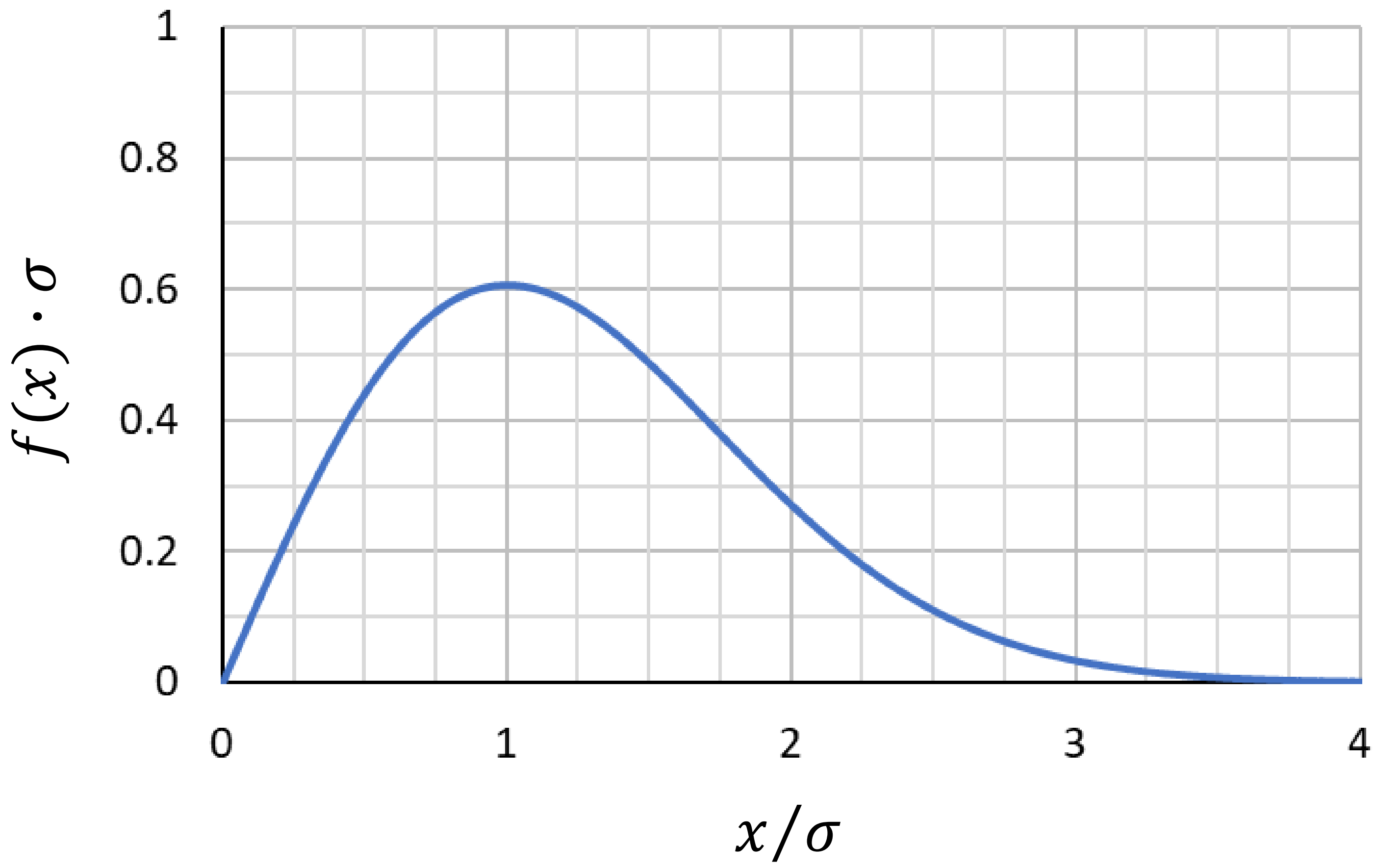
$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

となる。これをレイリー分布という。

# レイリー分布

レイリー分布の確率密度関数のグラフは下図のようになる。



# レイリー分布

レイリー分布の平均値は

$$\bar{r} = \int_0^\infty r f(r) \mathrm{d}r = \int_0^\infty r \cdot \frac{r}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}r$$

$$= \left[ r \cdot \left( -\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \approx 1.253\sigma$$

である。

# レイリー分布

レイリー分布の2乗平均は

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 f(r)\mathrm{d}r = \int_0^\infty r^2 \cdot \frac{r}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \left[r^2 \cdot \left(-\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2r\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = 2\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= 2\left[-\sigma^2\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^\infty = 2\sigma^2$$

である。よって、2乗平均の平方根（RMS）は $\sqrt{\overline{r^2}} = \sqrt{2}\sigma \approx 1.414\sigma$ である。

# レイリー分布

レイリー分布の中央値(メディアン)は

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\tilde{r}} f(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\tilde{r}} \frac{r}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}r = \left[-\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^{\tilde{r}} = 1 - \mathrm{e}^{-\tilde{r}^2/2\sigma^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\tilde{r}^2/2\sigma^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{r}^2}{2\sigma^2} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{r}^2 = \ln 4 \cdot \sigma^2$$

$$\therefore \tilde{r} = \sqrt{\ln 4}\,\sigma \approx 1.177\sigma$$

である。

# レイリー分布

レイリー分布の最頻値(モード)は

$$\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} - \frac{r^2}{\sigma^4}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2}\right) = 0$$

より、$\hat{r} = \sigma$ である。

このとき

$$f(\hat{r}) = \frac{\hat{r}}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\hat{r}^2/2\sigma^2} = \frac{\sigma}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\sigma^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}\sigma} \approx \frac{0.6065}{\sigma}$$

となる。

# 3次元の正規分布

確率変数 $x, y, z$ が独立で、いずれも平均 $0$、分散 $\sigma^2$ の正規分布にしたがうとき、その確率密度関数は

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= g(x)g(y)g(z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)/2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

で表される。

# 3次元の正規分布

確率変数 $x, y, z$ を

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

によって $r, \theta, \varphi$ に変換すると

$$f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)/2\sigma^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\therefore f(r,\theta,\varphi) = \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\sin\theta$$

# 3次元の正規分布

確率変数 $r, \theta, \varphi$ の確率密度関数

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \sin\theta$$

を $\varphi$ で積分して確率変数 $r, \theta$ の確率密度関数を求めると

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{r^2}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \mathrm{e}^{-r^2/\sigma^2} \sin\theta \end{aligned}$$

# マクスウェル分布

さらに $\theta$ で積分して確率変数 $r$ の確率密度関数を求めると

$$f(r) = \int_0^\pi f(r,\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

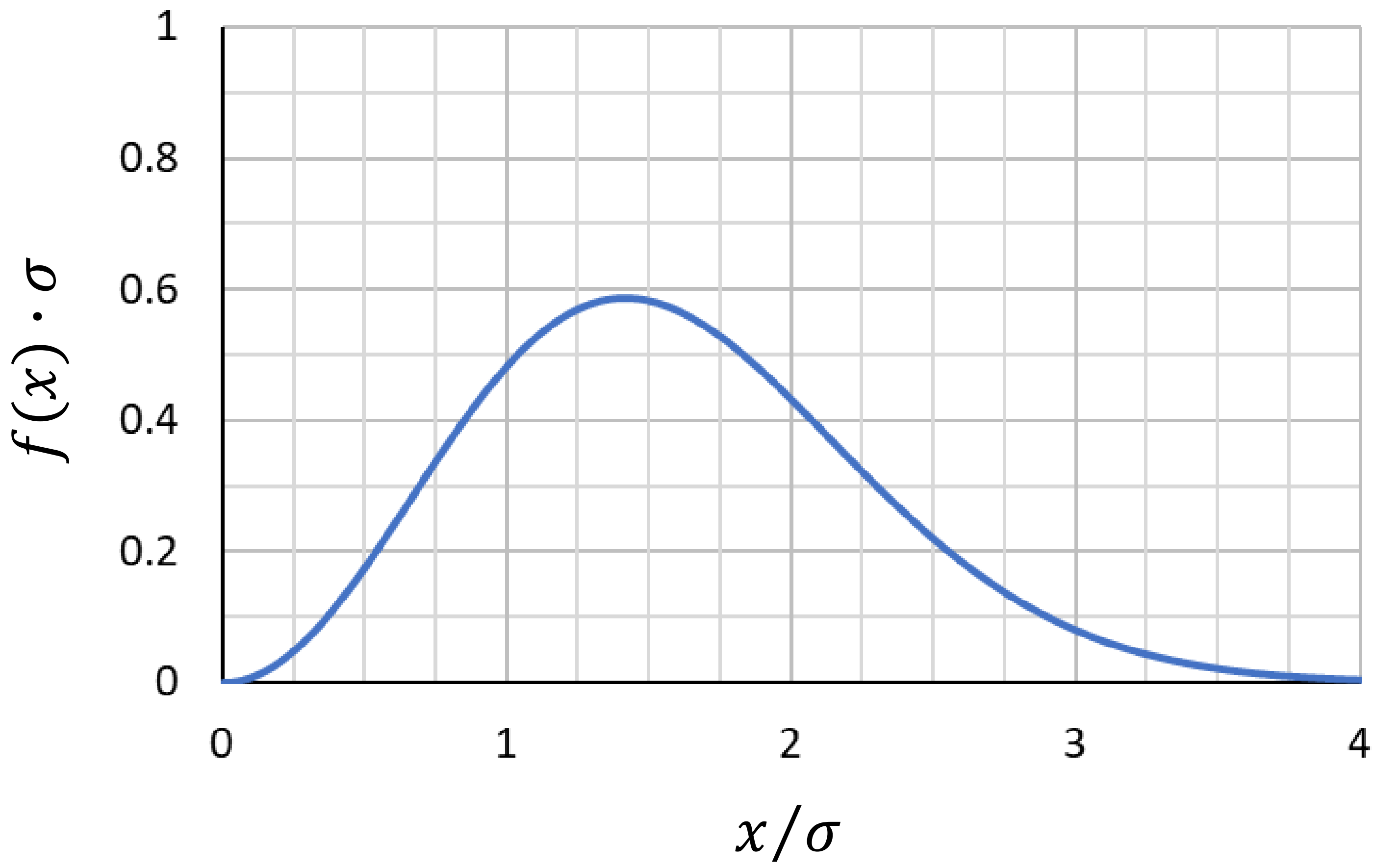
$$= \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}[-\cos\theta]_0^\pi$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{r^2}{\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

となる。これをマクスウェル分布という。

# マクスウェル分布

マクスウェル分布の確率密度関数のグラフは下図のようになる。



# マクスウェル分布

マクスウェル分布の平均値は

$$\bar{r} = \int_0^\infty rf(r)\mathrm{d}r = \int_0^\infty r \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{r^2}{\sigma^3}}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[r^2 \cdot \left(-\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty 2r\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\sigma^2\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^\infty = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma \approx 1.596\sigma$$

である。

# マクスウェル分布

マクスウェル分布の2乗平均は

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 f(r)\mathrm{d}r = \int_0^\infty r^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r^2}{\sigma^3} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[r^3 \cdot \left(-\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty 3r^2 \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{3}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

# マクスウェル分布

$$= \frac{3}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[r\cdot\left(-\sigma^2 \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \frac{3}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sigma^2 \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= 3\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r = 3\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\mathrm{d}r$$

$$= 3\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sigma = 3\sigma^2$$

である。よって、2乗平均の平方根（RMS）は $\sqrt{\overline{r^2}} = \sqrt{3}\sigma \approx 1.732\sigma$ である。

# マクスウェル分布

マクスウェル分布の中央値（メディアン）は

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\tilde{r}} f(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\tilde{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r^2}{\sigma^3} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \mathrm{d}r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\tilde{r}} \frac{r^2}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sigma} \mathrm{d}r$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\tilde{r}/\sigma} u^2 \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u$$

$$\therefore \int_0^{\tilde{r}/\sigma} u^2 \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

これを数値的に解くと、$\tilde{r} \approx 1.538\sigma$ である。

# マクスウェル分布

マクスウェル分布の最頻値（モード）は

$$\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\right)=\frac{2r}{\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}-\frac{r^3}{\sigma^5}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}$$

$$=\frac{r}{\sigma^3}\mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2}\left(2-\frac{r^2}{\sigma^2}\right)=0$$

より、$\hat{r}=\sqrt{2}\sigma\approx 1.414\sigma$ である。

このとき

$$f(\hat{r})=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{\hat{r}^2}{\sigma^3}\mathrm{e}^{-\hat{r}^2/2\sigma^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{2\sigma^2}{\sigma^3}\mathrm{e}^{-1}}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{1}{\sigma}}\approx\frac{0.5871}{\sigma}$$

となる。

# まとめ

各分布における $r/\sigma$ の値を下表に示す。

| | 半正規分布（1次元） | レイリー分布（2次元） | マクスウェル分布（3次元） |
|---|---|---|---|
| 平均値 | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.7979$ | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.253$ | $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.596$ |
| RMS | $1$ | $\sqrt{2} \approx 1.414$ | $\sqrt{3} \approx 1.732$ |
| 中央値 | $\sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.6745$ | $\sqrt{\ln 4} \approx 1.177$ | $1.538$ |
| 最頻値 | $0$ | $1$ | $\sqrt{2} \approx 1.414$ |