

# 反对称行列

## (2行2列、3行3列)

渡邊 俊夫

# 概要

実数を要素とする正方行列  $A$  の転置が  $-A$  に等しいとき、すなわち、

$$A^T = -A$$

が成り立つとき、 $A$  を**反対称行列** (または、歪対称行列、交代行列) という。

本稿では、2行2列と3行3列の反対称行列について、その性質 (一般形、行列式、固有値) を示す。また、3行3列の反対称行列について、その生成子  $J_x, J_y, J_z$  の間に交換関係

$$J_x J_y - J_y J_x = J_z, \quad J_y J_z - J_z J_y = J_x, \quad J_z J_x - J_x J_z = J_y$$

が成り立つことを示す。

## 行列の一般形: 2行2列

2行2列の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が反対称行列であるとき、

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

が等しいことより

$$a = -a = 0, \quad d = -d = 0, \quad b = -c$$

となる。したがって、2行2列の反対称行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の形で表される。

ここで、 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  は  $x$  軸を  $y$  軸に重ねる  $90^\circ$  回転を表す行列である。

## 行列式と固有値: 2行2列

2行2列の反対称行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$  の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} = c^2 \geq 0$$

である。

固有値は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -c \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + c^2 = 0$$

より、 $\lambda = \pm ci$  である。

$c = \pm 1$  のとき、 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  は直交行列である。

## 行列の一般形: 3行3列

3行3列の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  が反対称行列であるとき、

$a_{ji} = -a_{ij}$  であることより

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{31} = -a_{13}, \quad a_{32} = -a_{23}$$

となる。したがって、3行3列の反対称行列の独立な成分は3個であり、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

の形で表される。

## 行列式: 3行3列

3行3列の反対称行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$  の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{vmatrix} = -bfc + cbf = 0$$

である。

## 固有値: 3行3列

3行3列の反対称行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$  の固有値は

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & b & c \\ -b & -\lambda & f \\ -c & -f & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - f^2\lambda - b^2\lambda - c^2\lambda - bfc + cbf \\ &= -\lambda^3 - (b^2 + c^2 + f^2)\lambda = -\lambda(\lambda^2 + b^2 + c^2 + f^2) = 0 \end{aligned}$$

より

$\lambda = 0, \pm i\sqrt{b^2 + c^2 + f^2}$   
である。

## 反対称行列(3行3列)と外積

2つのベクトル  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$  の外積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は

3行3列の反対称行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$  を用いて

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

と表すことができる。

## 反対称行列(3行3列)の分解

3行3列の反対称行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$  は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} A &= a_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_x J_x + a_y J_y + a_z J_z \end{aligned}$$

ここで、

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 反対称行列(3行3列)の生成子

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は、 $y$  軸を  $z$  軸に重ねる  $x$  軸まわりの  $90^\circ$  回転と  $yz$  平面への射影を表す。

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は、 $z$  軸を  $x$  軸に重ねる  $y$  軸まわりの  $90^\circ$  回転と  $zx$  平面への射影を表す。

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は、 $x$  軸を  $y$  軸に重ねる  $z$  軸まわりの  $90^\circ$  回転と  $xy$  平面への射影を表す。

## 生成子の積

3行3列の反対称行列の生成子  $J_x, J_y, J_z$  の積を計算すると

$$J_x J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z J_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 生成子の積

$$J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_z J_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

# 生成子の交換関係

したがって、 $J_x, J_y, J_z$  は可換ではなく、次の交換関係が成り立つ。

$$J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_z$$

$$J_y J_z - J_z J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_x$$

$$J_z J_x - J_x J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_y$$

## 付録: 3次元空間内の回転

3次元空間内の原点のまわりの任意の回転は、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸のまわりの回転

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の積で表すことができる。

## 付録: 3次元空間内の微小回転

$R_x(\alpha)$ ,  $R_y(\beta)$ ,  $R_z(\gamma)$ は、微小回転の場合には

$$R_x(\alpha) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = E + \alpha J_x$$

$$R_y(\beta) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} = E + \beta J_y$$

$$R_z(\gamma) \cong \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E + \gamma J_z$$

となる。

## 付録: 3次元空間内の微小回転

微小回転の場合、

$$\begin{aligned} R &= R_x(\alpha)R_y(\beta)R_y(\gamma) \cong (E + \alpha J_x)(E + \beta J_y)(E + \gamma J_z) \\ &\cong E + \alpha J_x + \beta J_y + \gamma J_z \end{aligned}$$

より

$$\Delta R = R - E = \alpha J_x + \beta J_y + \gamma J_z = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

となる。すなわち、3次元空間内の原点のまわりの微小回転による変化は、3行3列の反対称行列で表される。