2年生の夢

渡邉 俊夫

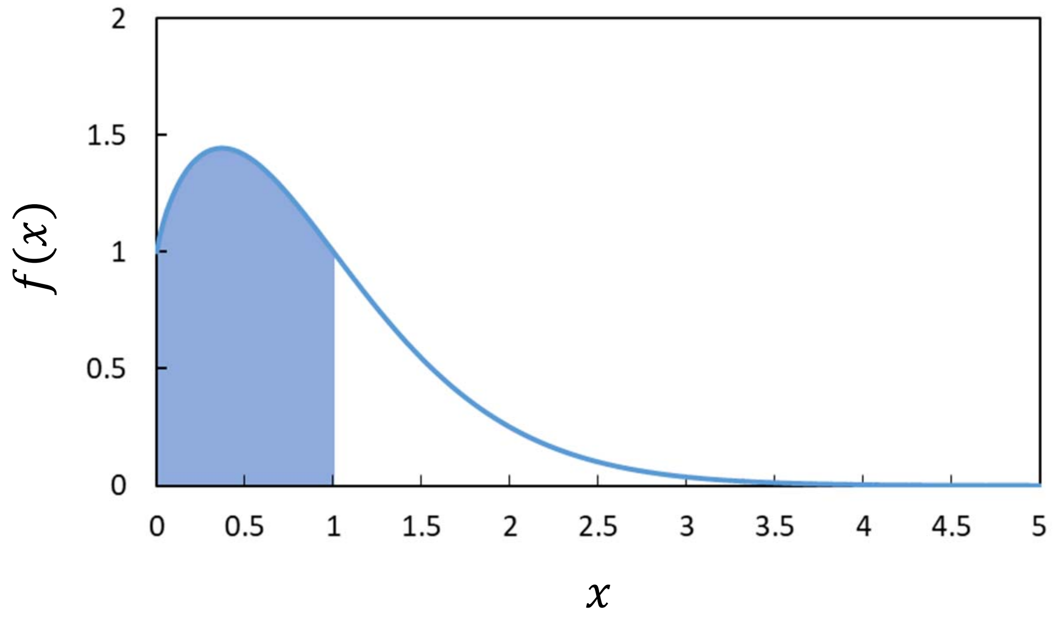
問題

x の x 乗の逆数の定積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x$$

を考える。

この積分の値は、図の青色の部分の面積である。



積分値の見当

$f(x) = \dfrac{1}{x^x}$ とおくと

$$\log f(x) = -x \log x = -\frac{\log x}{1/x}$$

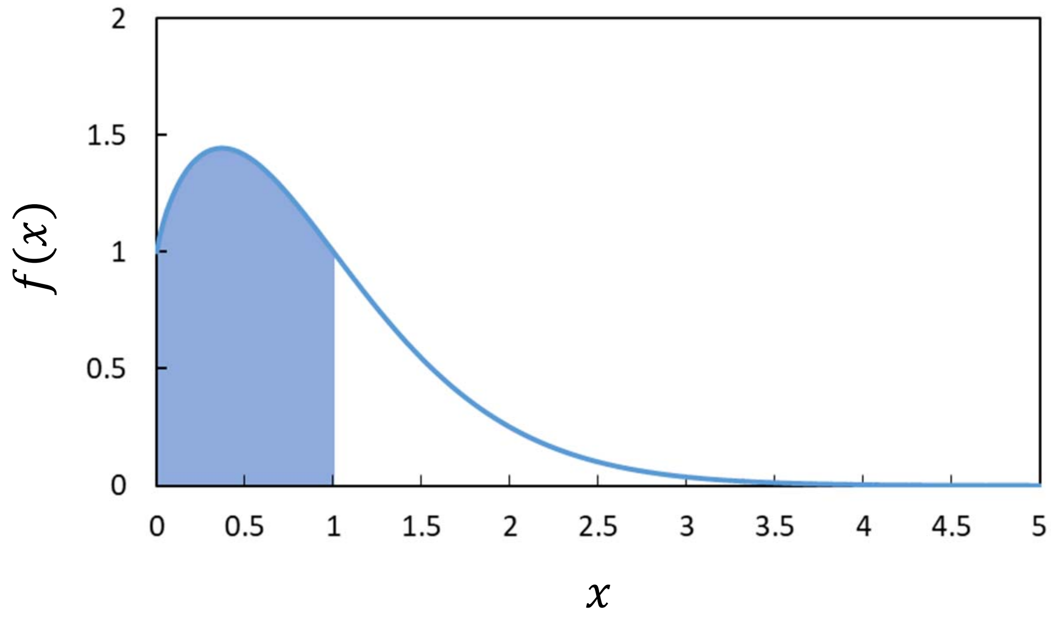
より、$x \to 0$ のとき

$$\log f(x) \to -\frac{(\log x)'}{(1/x)'} = -\frac{1/x}{-1/x^2} = x \to 0$$

だから、$f(0) \to 1$ である。

また、$f(1) = 1$ である。

図より、求める積分の値は 1 より大きく 1.5 より小さいとわかる。



テイラー展開

まず、

$$f(x) = \frac{1}{x^x} = \mathrm{e}^{-x\log x}$$

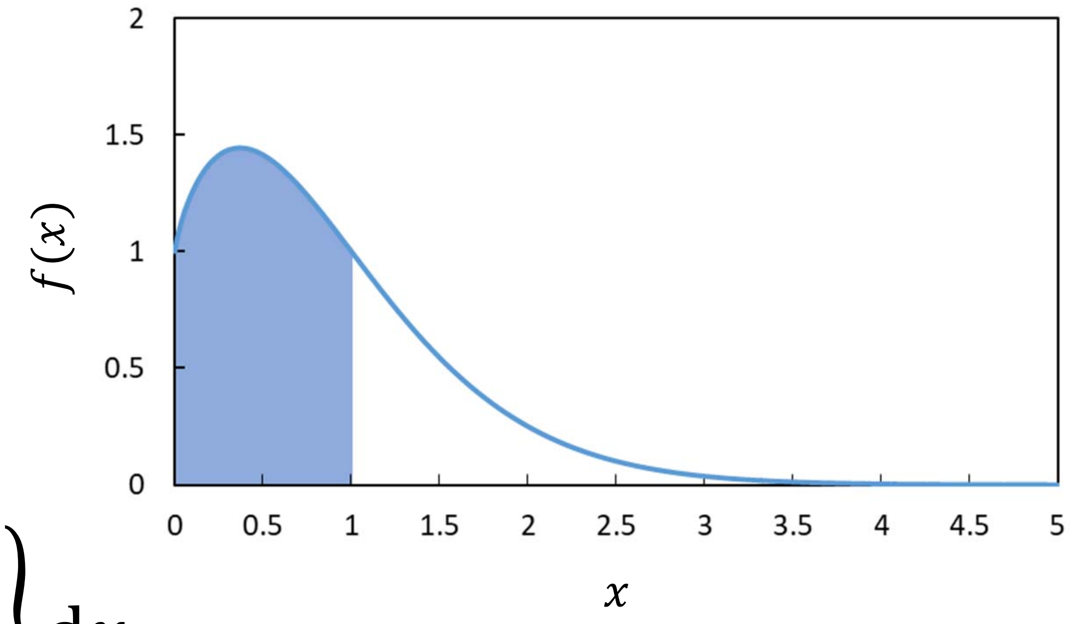
をテイラー展開すると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\log x)^n}{n!}$$

積分と和の交換

次に、積分と和の順序を入れ替えると

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\log x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\log x)^n}{n!}\right\}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n (\log x)^n}{n!}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n (\log x)^n \mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}
$$



部分積分

さらに、$n \geq 1$ に対して、部分積分により

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\log x)^n\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \frac{n(\log x)^{n-1}}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n (\log x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n (\log x)^{n-2}\mathrm{d}x$$

$$\cdots$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

部分積分

$n \geq 1$ に対して、部分積分により

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

これは

$$\int_0^1 \mathrm{d}x = [x]_0^1 \quad = 1$$

より、$n = 0$ に対しても成り立つ。

積分の値

以上より

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x\log x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (\log x)^n}{n!}\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n (\log x)^n \mathrm{d}x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

解

ゆえに

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$$

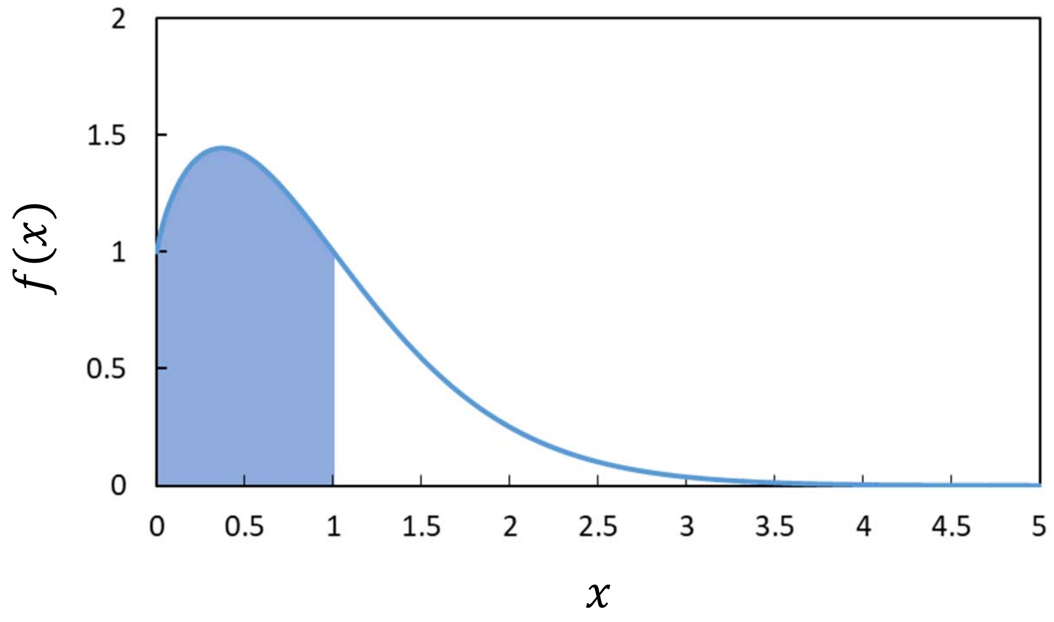
$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

$$= 1.291285997\ldots$$

を得る。

この結果を、俗に「2年生の夢（sophomore’s dream）」という。

Paul J. Nahin, “Inside Interesting Integrals,” Springer, 2015.



付録：ガンマ関数を用いた導出

$x^{n+1} = \mathrm{e}^{-u}$ とおくと、$(n+1)x^n \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$, $(n+1)\log x = -u$ より

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n \mathrm{d}x = \int_\infty^0 \left(\frac{-\mathrm{e}^{-u}}{n+1}\right)\left(\frac{-u}{n+1}\right)^n \mathrm{d}u$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^n \mathrm{d}u$$

ここで、階乗を一般化したガンマ関数の定義

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^n \mathrm{d}u$$

より

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$