ローン返済の数式

渡邉 俊夫

返済方式

ローン（借金）の返済方式として、次の2つがある。

- 元金均等方式：元金を均等割にした額と利息の合計を毎回返済する返済方式
- 元利均等方式：返済開始から終了まで、毎回の返済額が均等になる返済方式

返済方式としては元利均等方式が一般的であるが、元金均等方式は、元利均等方式に比べて、初期の返済額が大きくなる代わりに、総返済額は少なくなるメリットがある。

本稿では、2つの方式について総返済額を算出する数式を導き、両者の違いを定量的に明らかにする。ただし、毎回の返済額の1円未満の端数調整については考慮しない。

元金均等方式

A 円を月利 m で Nヶ月借りたときの返済額を求める。

1ヶ月後の返済額は、$x_1 = \dfrac{A}{N} + Am = A\left(\dfrac{1}{N} + m\right)$

2ヶ月後の返済額は、$x_2 = \dfrac{A}{N} + A\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)m = A\left(\dfrac{1}{N} + m - \dfrac{m}{N}\right)$

3ヶ月後の返済額は、$x_3 = \dfrac{A}{N} + A\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)m = A\left(\dfrac{1}{N} + m - \dfrac{2m}{N}\right)$

. . .

であるから、nヶ月後の返済額は

$$x_n = A\left(\frac{1}{N} + m - \frac{(n-1)m}{N}\right)$$

となる。

元金均等方式

したがって、Nヶ月間の総返済額 X は

$$X=\sum_{n=1}^{N}x_n=\sum_{n=1}^{N}A\left(\frac{1}{N}+m-\frac{(n-1)m}{N}\right)$$

$$=A+ANm-A\frac{m}{N}\sum_{n=1}^{N}(n-1)=A+ANm-A\frac{m}{N}\frac{(N-1)N}{2}$$

$$=A+ANm-A\frac{(N-1)}{2}m=A+A\frac{N+1}{2}m$$

であり、総返済額 X の元金 A に対する実質的な利率は

$$\frac{X-A}{A}=\frac{N+1}{2}m$$

となる。すなわち、実質的な利率は、月利 m だけでなく返済期間 N にもほぼ比例する。

元利均等方式

A 円を月利 m で Nヶ月借りたときの返済額を求める。
1ヶ月の返済額を x 円とすると、

1ヶ月後の負債は、$A(1+m)-x$

2ヶ月後の負債は、$(A(1+m)-x)(1+m)-x=A(1+m)^2-x(1+m)-x$

3ヶ月後の負債は、$(A(1+m)^2-x(1+m)-x)(1+m)-x$

$$=A(1+m)^3-x(1+m)^2-x(1+m)-x$$

. . .

であるから、nヶ月後の負債は

$$A(1+m)^n-\sum_{k=1}^{n}x(1+m)^{k-1}=A(1+m)^n-x\frac{1-(1+m)^n}{1-(1+m)}$$

$$=A(1+m)^n-x\frac{(1+m)^n-1}{m}$$

$$=\frac{(Am-x)(1+m)^n+x}{m}$$

元利均等方式

Nヶ月後に負債が0になるには

$$\frac{(Am-x)(1+m)^n+x}{m}=0$$

を満たす x を求めればよい。

$$(Am-x)(1+m)^N+x=0$$

$$x-Am=\frac{x}{(1+m)^N}$$

$$x\left(1-\frac{1}{(1+m)^N}\right)=Am$$

$$\therefore x=\frac{Am}{1-\frac{1}{(1+m)^N}}=\frac{Am}{1-(1+m)^{-N}}$$

元利均等方式

Nヶ月後に負債が0になる1ヶ月の返済額は

$$x = \frac{Am}{1 - \frac{1}{(1+m)^N}} = \frac{Am}{1-(1+m)^{-N}}$$

である。したがって、Nヶ月間の総返済額は

$$Nx = \frac{ANm}{1 - \frac{1}{(1+m)^N}} = \frac{ANm}{1-(1+m)^{-N}}$$

であり、総返済額 Nx の元金 A に対する実質的な利率は

$$\frac{Nx - A}{A} = \frac{Nm}{1 - \frac{1}{(1+m)^N}} = \frac{Nm}{1-(1+m)^{-N}} - 1$$

となる。

元利均等方式

$m \ll 1$ のとき、m^2 の項まで考慮すると、総返済額は

$$Nx = \frac{ANm}{1-(1+m)^{-N}}$$

$$\cong \frac{ANm}{1-\left(1-Nm+\frac{1}{2}N(N+1)m^2-\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)m^3\right)}$$

$$= \frac{ANm}{Nm-\frac{1}{2}N(N+1)m^2+\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)m^3}$$

$$= \frac{A}{1-\frac{1}{2}(N+1)m+\frac{1}{6}(N+1)(N+2)m^2}$$

元利均等方式

$m \ll 1$ のとき、m^2 の項まで考慮すると、総返済額は

$$
\begin{aligned}
Nx &\cong \frac{A}{1 - \frac{1}{2}(N+1)m + \frac{1}{6}(N+1)(N+2)m^2} \\
&= A\left(1 - \frac{1}{2}(N+1)m + \frac{1}{6}(N+1)(N+2)m^2\right)^{-1} \\
&\cong A\left(1 + \frac{1}{2}(N+1)m - \frac{1}{6}(N+1)(N+2)m^2 + \frac{1}{4}(N+1)^2m^2\right) \\
&= A\left(1 + \frac{N+1}{2}m + \frac{1}{12}(N+1)\big(-2(N+2) + 3(N+1)\big)m^2\right) \\
&= A\left(1 + \frac{N+1}{2}m + \frac{N^2-1}{12}m^2\right)
\end{aligned}
$$

となる。

元利均等方式

$m \ll 1$ のとき、m^2 の項まで考慮すると、総返済額は

$$Nx \cong A\left(1 + \frac{N+1}{2}m + \frac{N^2-1}{12}m^2\right)$$

となるから、総返済額 Nx の元金 A に対する実質的な利率は

$$\frac{Nx - A}{A} \cong \frac{N+1}{2}m + \frac{N^2-1}{12}m^2$$

である。ここで、右辺第1項は元金均等方式の利率であり、元利均等方式では右辺第2項の分だけ利率が増大する。

例

年利1.5%（月利 $m=0.125\%$）、返済期間20年（$N=240$ヶ月）のとき、総返済額の元金に対する実質的な利率は次のようになる。

元金均等方式 $$\frac{N+1}{2}m=15.1\%$$

元利均等方式 $$\frac{Nm}{1-(1+m)^{-N}}-1\cong\frac{N+1}{2}m+\frac{N^2-1}{12}m^2=15.8\%$$

※元利均等方式の厳密解と近似解の比較

厳密解 $$\frac{Nm}{1-(1+m)^{-N}}-1=15.81090\%$$

近似解 $$\frac{N+1}{2}m+\frac{N^2-1}{12}m^2=15.81249\%$$