高校の物理を履修していない学生のための

# 電磁気学ミニマム

（「高校生のための電磁気学ミニマム」の改題）

渡邉 俊夫

# クーロンの法則

電気量 $q, Q$ の2つの点電荷が距離 $r$ だけ離れた位置にあるとき、その間に大きさ

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

電気量の単位は C(クーロン)

の力が働く(クーロンの法則)。ここで、$\varepsilon_0$ は真空の誘電率であり、

$$\varepsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.98755 \times 10^{9}\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$$

F(ファラド)は静電容量の単位で

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{N\cdot m/C}} = \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\cdot m}}$$

である。

電荷には正負があり、同符号ならば斥力、異符号ならば引力である。

# 電場

2つの電荷の間に働く力を、一方の電荷 $Q$ が電場を作り、その電場が他方の電荷 $q$ に力を及ぼすものと考える。電場の大きさを $E$ とすると

$$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

であるから、点電荷 $Q$ が距離 $r$ の位置に作る電場の大きさは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

電場の単位は N/C

である。

【補足】
より一般には、電荷 $Q$ が作る電束密度 $D$（源の場）から電場 $E$（力の場）が生じ、その電場 $E$ が電荷 $q$ に力を及ぼす、と考える。

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

# 電位

電場 $E$ の中で電荷 $q$ を、基準となる点からその位置まで移動させるのに必要な単位電気量あたりの仕事を電位という。

電位は、電荷 $q$ が持つ単位電気量あたりの位置エネルギーである。

点電荷 $Q$ によって生じる電位 $V$ は、無限遠を基準点にとると、

$$V=-\int_{\infty}^{r}E\mathrm{d}r=-\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

である。

また逆に、電位 $V$ の傾きが電場 $E$ の大きさである。

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

電位の単位は $\mathrm{V}$（ボルト）
電場の単位は $\mathrm{N/C}=\mathrm{V/m}$

【補足】
より一般には、電場はベクトル量で、電位はスカラー量である。

# ガウスの法則

電気量 $Q$ の電荷を囲む閉曲面上で、曲面に垂直な電場の大きさを $E$ とすると、

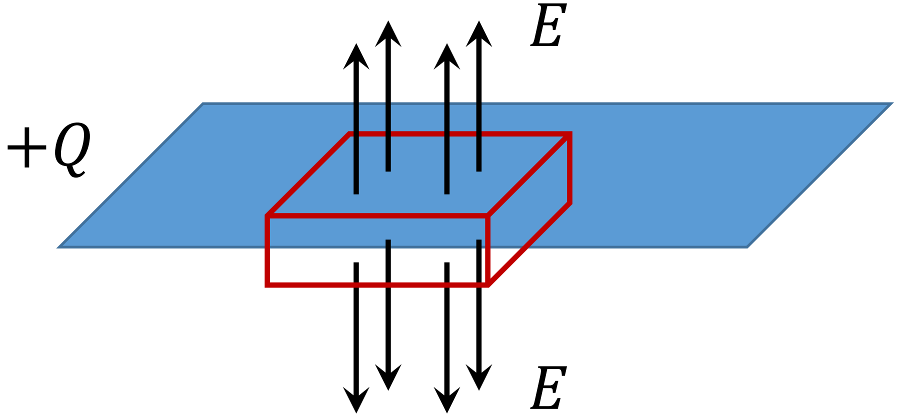
$$Q = \varepsilon_0 \int_S E \mathrm{d}S$$

が成り立つ（ガウスの法則）。

面積 $S$ の十分に大きな平面内に一様に分布させた電荷 $Q$ は、平面に垂直な向きの電場を作る。その電場の大きさは、平面からの距離によらず

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

である。




【補足】
より一般には、電束密度を $\boldsymbol{D}$ として、次の関係が成り立つ。

$$Q = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

# 静電容量(キャパシタンス)

極板の面積 $S$、間隔 $d$ の平行板キャパシター(コンデンサー)のそれぞれの極板に電気量 $+Q, -Q$ の電荷が蓄えられているとき、極板間の電場の大きさは

$$E = E_+ + E_- = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

となり、極板間の電圧は

$$V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{C}$$

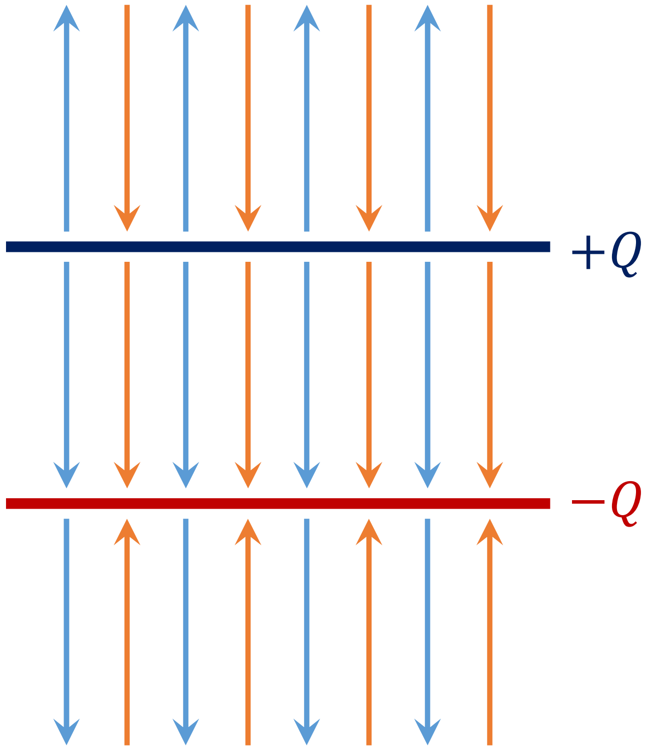
となる。ここで、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

をキャパシターの静電容量(キャパシタンス)という。

静電容量の単位は F(ファラド)

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{s}}{\Omega}$$




極板間を誘電率 $\varepsilon$ の物質で満たした場合の静電容量は $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$ となる。

# 電流

電荷の流れが電流である。電流の大きさ $I$ は、ある断面を通過する電気量 $Q$ の単位時間あたりの量であり、

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

電流の単位は A(アンペア)
$\mathrm{A} = \mathrm{C/s}$

である。

また逆に、電流 $I$ を時間で積分すれば、その断面を通過した電気量 $Q$ が求められる。

$$Q = \int I\mathrm{d}t$$

【補足】
電流の単位アンペアは、電気素量(電子の電荷の大きさ) $e$ が

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

となるように定義されている。

# オームの法則

導体を流れる電流の大きさ $I$ は、その両端の電位差（電圧）$V$ に比例する（オームの法則）。

$$I = \frac{V}{R}$$

ここで、$R$ を電気抵抗という。

電気抵抗の単位は Ω（オーム）
$\Omega = \mathrm{V/A}$

電気抵抗 $R$ は断面積 $S$ に反比例し、長さ $l$ に比例する。物質の抵抗率を $\rho$ とすると

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

と表される。

電流の仕事率（単位時間あたりにする仕事）が電力 $P$ であり、

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

$$\mathrm{V \cdot A} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$$

である。

# 電流間に働く力

2つの平行な電流 $I_1, I_2$ が距離 $r$ だけ離れた位置にあるとき、その間に単位長さあたり

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}$$

の大きさの力が働く。ここで、$\mu_0$ は真空の透磁率であり、

$$\mu_0 = 1.25663706212 \times 10^{-6}\ \mathrm{H/m}$$

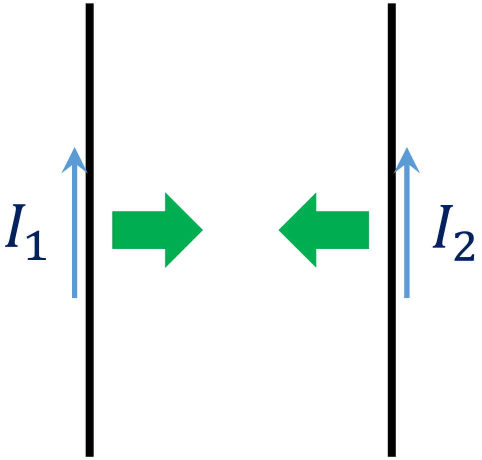
$$\frac{\mu_0}{2\pi} = 2.000 \times 10^{7}\ \mathrm{N/A^2}$$

である。

H（ヘンリー）はインダクタンスの単位で

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A}} = \frac{(\mathrm{N\cdot m/C})\cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{A^2}}$$

2つの電流が同じ向きならば引力、逆向きならば斥力である。



# 磁場と磁束密度

2つの電流の間に働く力を、一方の電流 $I_1$ が磁場 $H$（源の場）を作り、その磁場から磁束密度 $B$（力の場）が生じ、その磁束密度が他方の電流 $I_2$ に力を及ぼすものと考える。真空中での磁場の大きさ $H$ と磁束密度 $B$ との関係は

$$B = \mu_0 H$$

であるから、

$$f = I_2 B = I_2 \mu_0 H = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}$$

磁場の単位は A/m

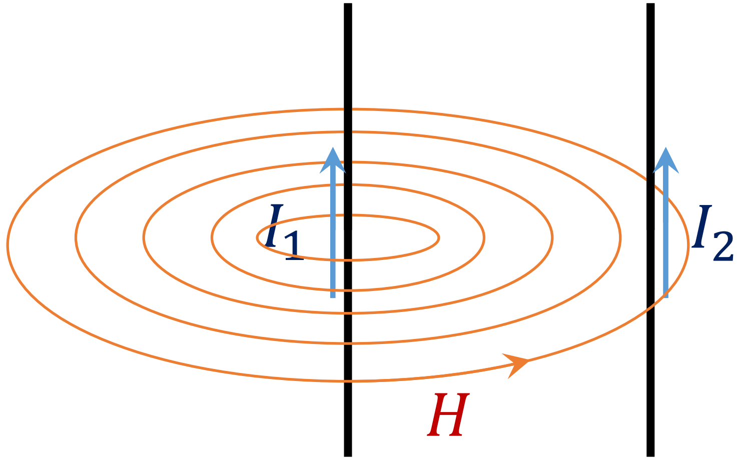
磁束密度の単位は T（テスラ）

$$\mathrm{T} = \mathrm{Wb/m^2} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{(N \cdot m/C) \cdot s}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}$$

より、電流 $I_1$ が距離 $r$ の位置に作る磁場の大きさは

$$H = \frac{I_1}{2\pi r}$$

である（アンペールの法則）。磁場の向きは、
電流 $I_1$ の方向に進む右ねじが回る向きである。



# ローレンツ力

単位長さあたり$\bar{n}$個の電荷$q$が速さ$v$で流れているとき、大きさ$I_2 = \bar{n}qv$の電流が生じる。その電流に垂直な磁束密度$B$から、1個の電荷が受ける力の大きさは

$$F = \frac{f}{\bar{n}} = \frac{I_2 B}{\bar{n}} = \frac{\bar{n}qvB}{\bar{n}} = qvB$$

となる。これをローレンツ力という。ローレンツ力の向きは、電荷の速度の方向を磁束密度の方向に重ねるように回した右ねじが進む向きである。

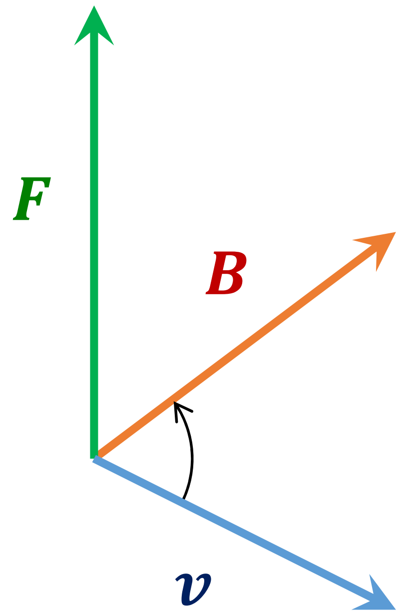
【補足】
より一般には、ベクトルの外積を用いて

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

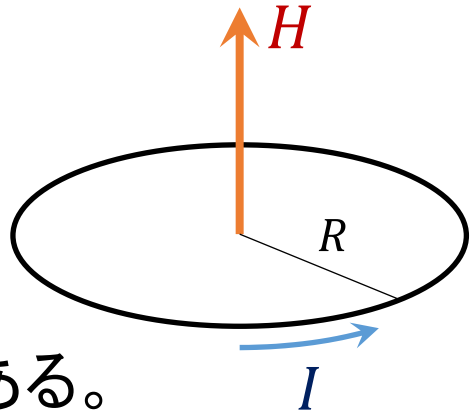
と表される。

磁束密度の単位は T(テスラ)

$$\mathrm{C \cdot m/s \cdot T = C \cdot m/s \cdot Wb/m^2 = C \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} = C \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{(N \cdot m/C) \cdot s}{m^2} = N}$$



# 円電流が作る磁場




半径 $R$ の円電流 $I$ がその中心に作る磁場の大きさは

$$H = \frac{I}{2R}$$

である。磁場の向きは、電流 $I$ の向きに回した右ねじが進む向きである。

【補足】
微小電流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ が $\boldsymbol{r}$ の位置に作る磁場 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ は、ベクトルの外積を用いて

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^2} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される（ビオ・サバールの法則）。これより、半径 $R$ の円電流 $I$ がその中心に作る磁場の大きさは

$$H = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{IR\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \frac{I}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{I}{2R}$$

となる。

# ソレノイド内部の磁場

単位長さあたりの巻数 $n$ の十分に長いコイル(ソレノイド)に流れる電流 $I$ が、その内部に作る磁場の大きさは

$$H = nI$$

である。磁場の向きは、電流 $I$ の向きに回した右ねじが進む向きである。

【補足】
ビオ・サバールの法則より、半径 $R$ の円電流 $I$ がその中心軸上の $z$ の位置に作る磁場の大きさは

$$h = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{IR^2\mathrm{d}\varphi}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{R^2 I}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2 I}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

となる。これをソレノイド全体について積分して、$z = R\tan\theta$ と変数変換すると

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} hn\mathrm{d}z = \frac{nR^2 I}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{nI}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{nI}{2}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = nI$$

を得る。

# 電磁誘導

磁束 $\Phi$ は、ある断面を貫く磁束密度 $B$ を積分したものである。

$$\Phi = \int_S B \mathrm{d}S$$

磁束の単位は Wb（ウェーバ）
$\mathrm{Wb} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$

磁束 $\Phi$ が時間的に変化するとき、その断面の外周に沿って磁束の変化を妨げるような起電力（電圧）

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

が生じる（ファラデーの電磁誘導の法則）。

# インダクタンス

断面積 $S$、巻数 $N$、長さ $l$ の十分長いコイル(ソレノイド)に電流 $I$ が流れているとき、コイル断面を貫く磁束は

$$\Phi = BS = \mu_0 HS = \mu_0 \frac{N}{l} IS = \frac{\mu_0 NS}{l} I$$

であり、電流 $I$ の時間変化による起電力(電圧)は

$$V = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 N^2 S}{l}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

となる。ここで、

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

をコイルの**インダクタンス**という。

インダクタンスの単位は $\mathrm{H}$(ヘンリー)

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A}} = \Omega\cdot\mathrm{s}$$

コイルの芯を透磁率 $\mu$ の物質で満たした場合のインダクタンスは $L = \dfrac{\mu N^2 S}{l}$ となる。

# 電磁波

磁界の時間的な変化によってその周囲に電界が生じるのと同様に、電界の時間的な

変化 $\varepsilon_0 \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ (変位電流)は電流と同じ働きをもち、その周囲に磁界が生じる。

これにより電場 $E$ と磁場 $H$ は互いに作用し合いながら、空間を波として伝わっていく。
これが電磁波である。真空中の電磁波の速さ(光速)は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

である。

【補足】
長さの単位メートルは、真空中の
電磁波の速さ(光速)で定義されている。