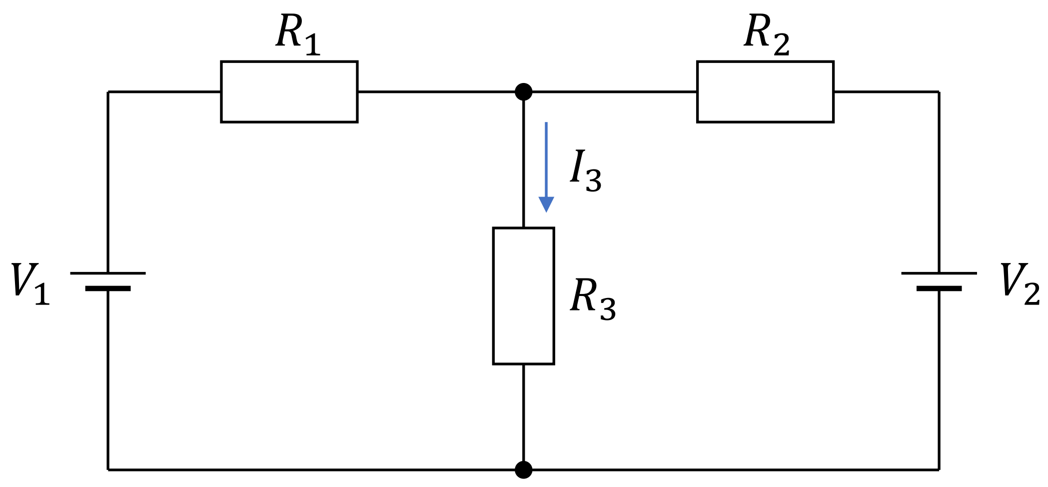
直流回路に流れる電流
－８つの解法－

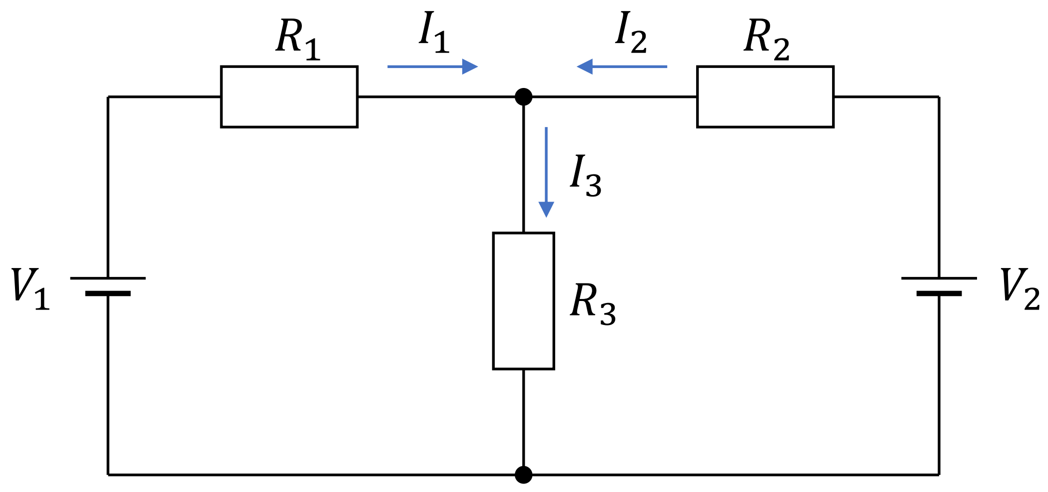
渡邉 俊夫

問題

下図の回路において R_3 に流れる電流 I_3 を求めなさい。



キルヒホッフの法則①



・回路内の任意の節点に出入りする電流の総和は 0 である。
・回路内の任意の閉路を一周するとき、起電力の総和と電圧降下の総和は等しい。

R_1, R_2 に流れる電流をそれぞれ I_1, I_2 とすると

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 & \cdots ① \\ V_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 & \cdots ② \\ V_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

②より $\quad I_1 = \dfrac{V_1 - I_3 R_3}{R_1} = \dfrac{V_1}{R_1} - \dfrac{R_3}{R_1} I_3$

③より $\quad I_2 = \dfrac{V_2 - I_3 R_3}{R_2} = \dfrac{V_2}{R_2} - \dfrac{R_3}{R_2} I_3$

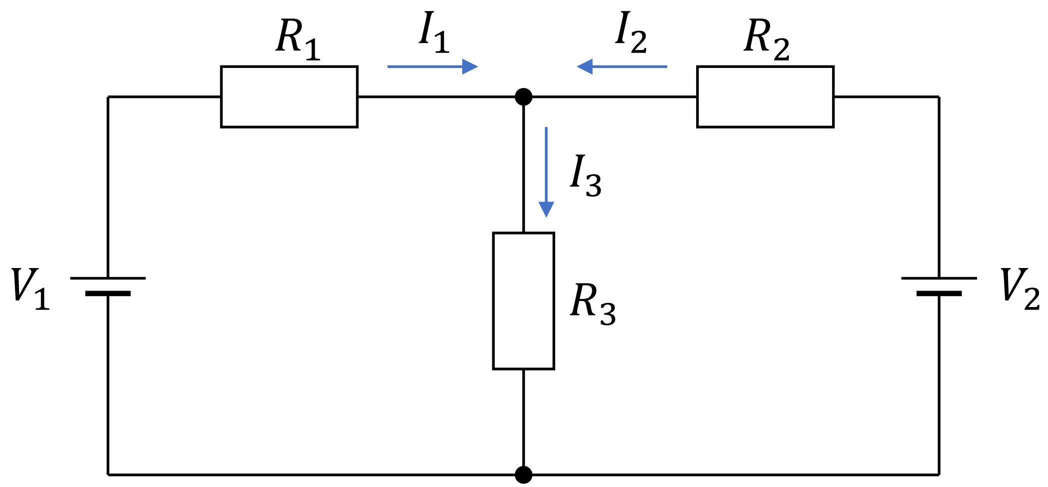
①へ代入して

$$I_3 = I_1 + I_2 = \left(\frac{V_1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} I_3\right) + \left(\frac{V_2}{R_2} - \frac{R_3}{R_2} I_3\right)$$

$$\left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2}\right) I_3 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

$$\therefore I_3 = \frac{\dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_2}{R_2}}{1 + \dfrac{R_3}{R_1} + \dfrac{R_3}{R_2}} = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

キルヒホッフの法則②



R_1, R_2 に流れる電流をそれぞれ I_1, I_2 とすると

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 & \cdots ① \\ V_1 = I_1R_1 + I_3R_3 & \cdots ② \\ V_2 = I_2R_2 + I_3R_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

② × R_2 + ③ × R_1 より

$$R_2V_1 + R_1V_2 = (I_1 + I_2)R_1R_2 + I_3R_3(R_2 + R_1)$$

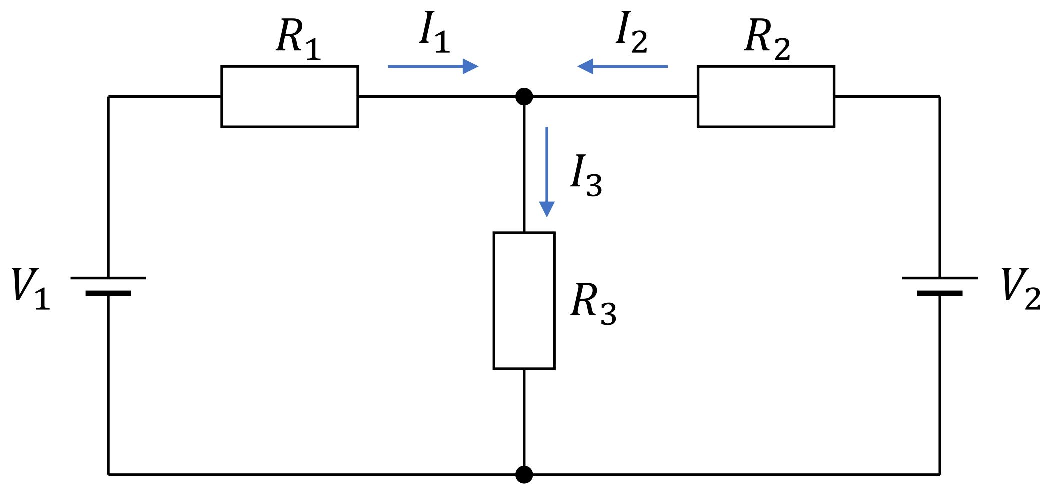
①を代入すると

$$\begin{aligned} R_2V_1 + R_1V_2 &= I_3R_1R_2 + I_3R_3(R_2 + R_1) \\ &= I_3(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) \end{aligned}$$

$$\therefore I_3 = \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

・回路内の任意の節点に出入りする電流の総和は 0 である。
・回路内の任意の閉路を一周するとき、起電力の総和と電圧降下の総和は等しい。

キルヒホッフの法則③



・回路内の任意の節点に出入りする電流の総和は 0 である。
・回路内の任意の閉路を一周するとき、起電力の総和と電圧降下の総和は等しい。

R_1, R_2 に流れる電流をそれぞれ I_1, I_2 とすると

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 & \cdots ① \\ V_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 & \cdots ② \\ V_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

これより

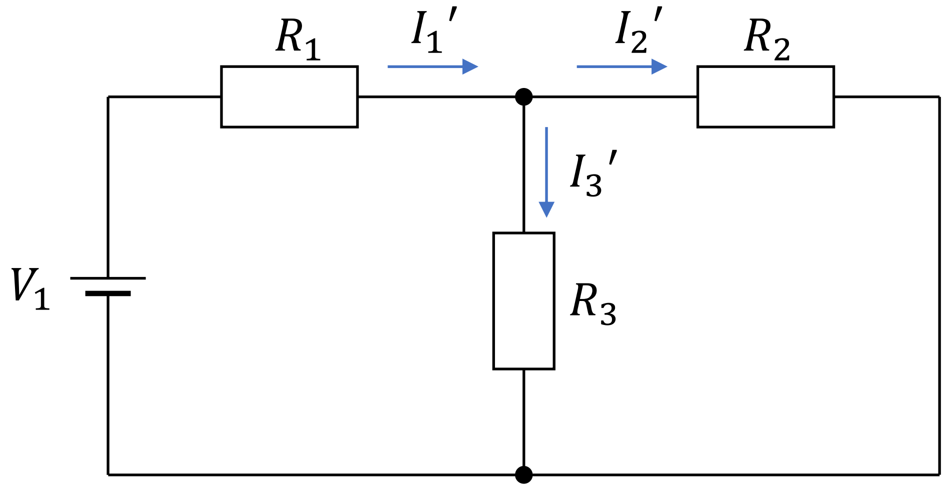
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

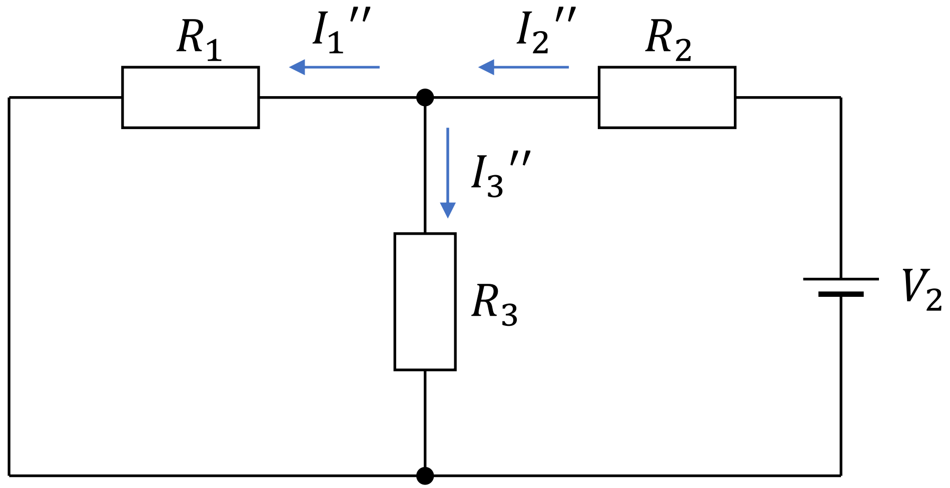
これを解いて

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ R_1 & 0 & V_1 \\ 0 & R_2 & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}} = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

重ねの理

電源をそれぞれ短絡したときの電流を重ね合わせる





V_2 を短絡したとき、回路全体の抵抗は

$$R' = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

だから、R_1 に流れる電流は

$$I_1{}' = \frac{V_1}{R'} = \frac{V_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3)V_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

であり、R_3 に流れる電流は

$$I_3{}' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1{}' = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot \frac{(R_2 + R_3)V_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$= \frac{R_2 V_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

同様に、V_1 を短絡したとき、R_3 に流れる電流は

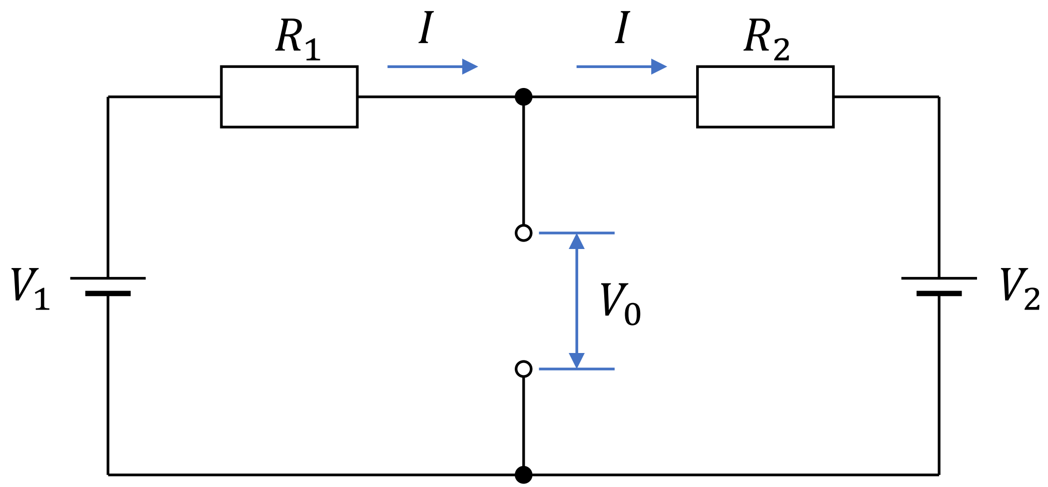
$$I_3{}'' = \frac{R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

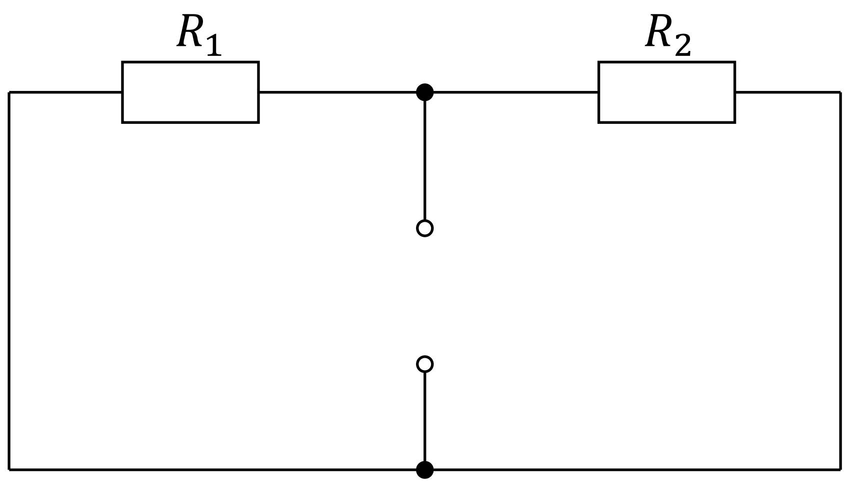
したがって

$$I_3 = I_3{}' + I_3{}'' = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

テブナンの定理

R_3 を取り除いた回路を
等価電源に置き換える





R_3 を取り除いて開放したとき、回路に流れる電流は

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

であるから、R_3 の端子間電圧は

$$V_0 = V_1 - IR_1 = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}R_1 = \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1 + R_2}$$

V_1, V_2 を短絡したとき、R_3 の端子間からみた回路の抵抗は

$$r = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

R_3 に流れる電流 I_3 は、起電力 V_0、内部抵抗 r の等価電源を R_3 に接続したときと同じだから

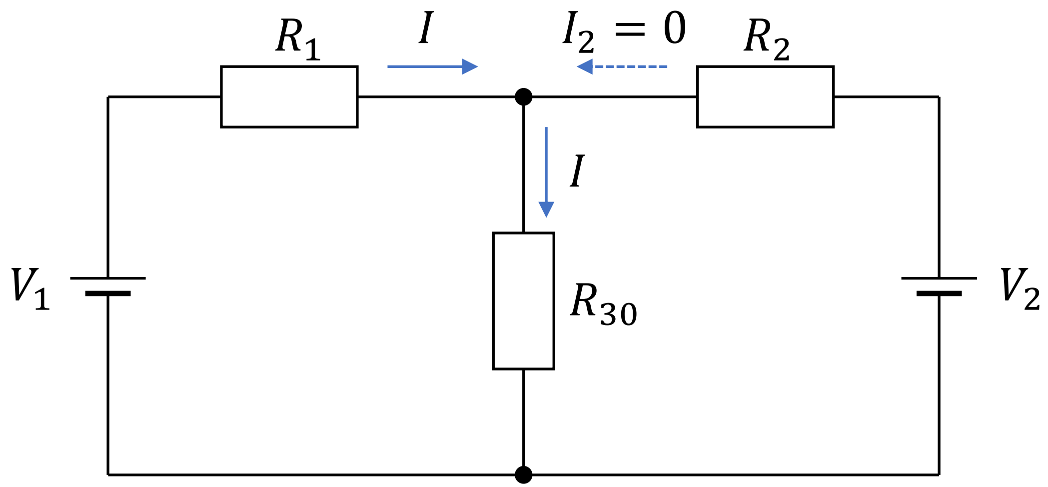
$$V_0 - I_3r = I_3R_3$$

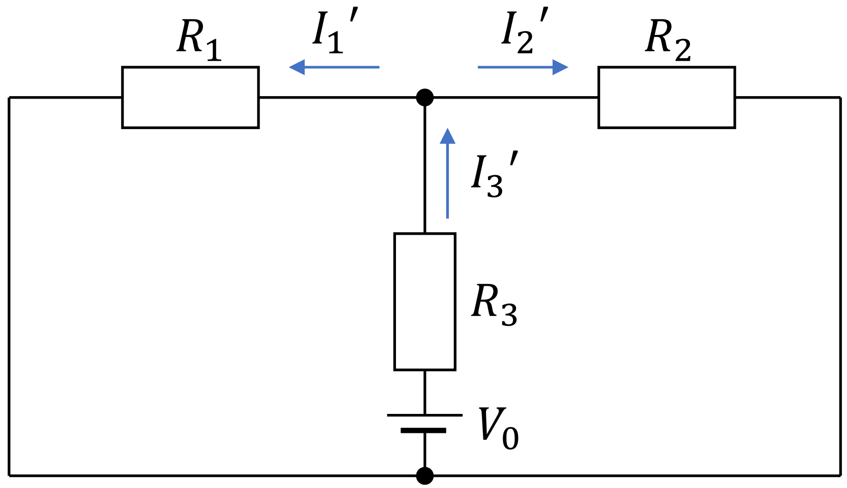
$$\therefore I_3 = \frac{V_0}{R_3 + r} = \frac{1}{R_3 + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_3(R_1 + R_2) + R_1R_2} = \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

補償定理①

抵抗を変化させたときの電流の
変化分を補償する電源を加える





$R_3 = R_{30}$ のとき、R_2 に流れる電流が 0 になるとすると
R_{30} に流れる電流を I として

$$R_{30} = \frac{V_2}{I} = \frac{R_1}{V_1 - V_2} V_2 = \frac{V_2}{V_1 - V_2} R_1$$

R_{30} が $\Delta R_3 = R_3 - R_{30}$ だけ増えると、V_1, V_2 を短絡して
起電力が

$$V_0 = I\Delta R_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}\left(R_3 - \frac{V_2}{V_1 - V_2} R_1\right)$$

$$= \frac{R_3}{R_1}(V_1 - V_2) - V_2$$

の電源を R_3 と直列に I と逆向きに挿入した分だけ
電流が変化する。したがって、R_3 に流れる電流は

$$I_3 = I - \frac{V_0}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

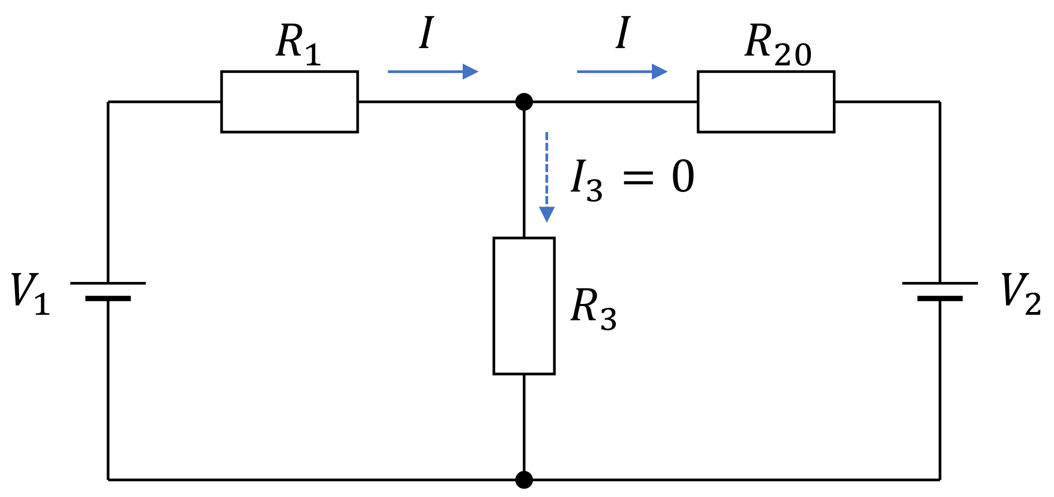
$$= \frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}\left(\frac{R_3}{R_1}(V_1 - V_2) - V_2\right)$$

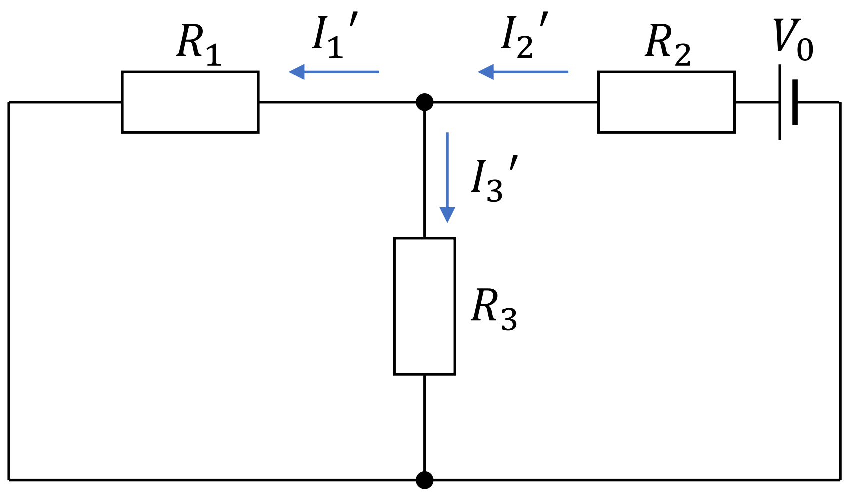
$$= \frac{R_1 R_2 (V_1 - V_2) + R_1 (R_1 + R_2) V_2}{R_1 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)}$$

$$= \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

補償定理②

抵抗を変化させたときの電流の
変化分を補償する電源を加える





$R_2 = R_{20}$ のとき、R_3 に流れる電流が 0 になるとすると
R_{20} に流れる電流を I として

$$R_{20} = \frac{-V_2}{I} = -\frac{R_1}{V_1}V_2 = -\frac{V_2}{V_1}R_1$$

ただし、ここで V_1 と V_2 は異符号と考える。
R_{20} が $\Delta R_2 = R_2 - R_{20}$ だけ増えると、V_1, V_2 を短絡して起電力が

$$V_0 = I\Delta R_2 = \frac{V_1}{R_1}\left(R_2 + \frac{V_2}{V_1}R_1\right) = \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1}$$

の電源を R_2 と直列に I と逆向きに挿入した分だけ
電流が変化する。したがって、R_3 に流れる電流は

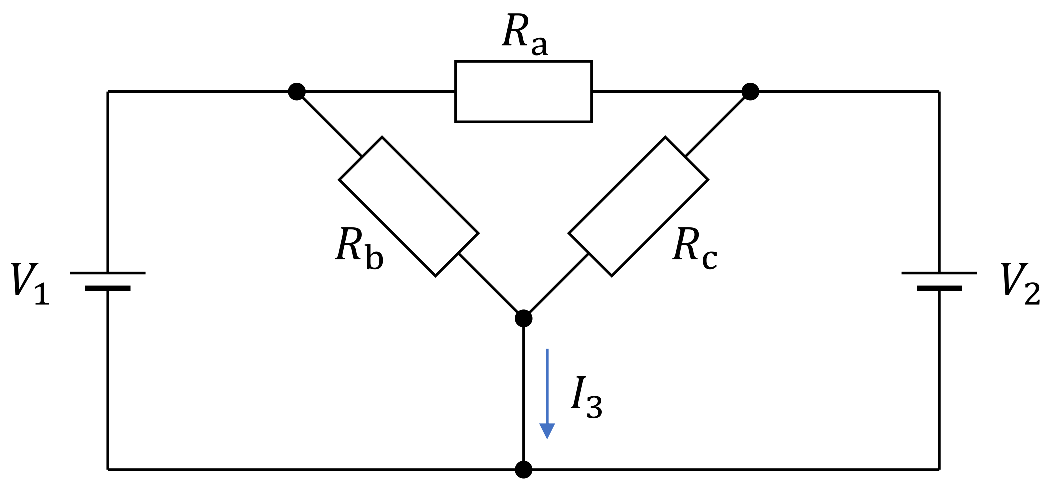
$$I_3 = \frac{V_0}{R_2 + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_1V_0}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$= \frac{R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1}$$

$$= \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

Y-Δ変換

Y型回路を等価なΔ型回路に置き換える



抵抗 R_1, R_2, R_3からなる回路をY-Δ変換すると

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

したがって、求める電流は

$$I_3 = \frac{V_1}{R_b} + \frac{V_2}{R_c}$$

$$= \frac{R_2V_1 + R_1V_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

（補足）端子間の抵抗が等しくなるには

$$R_1 + R_2 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + (R_b + R_c)} = \frac{R_aR_b + R_cR_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_c + (R_a + R_b)} = \frac{R_cR_a + R_bR_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_b(R_c + R_a)}{R_b + (R_c + R_a)} = \frac{R_bR_c + R_aR_b}{R_a + R_b + R_c}$$

3式の和の半分と各式との差より

$$R_1 = \frac{R_aR_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_cR_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_bR_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$\therefore R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1$$

$$= \frac{R_aR_bR_c(R_a + R_b + R_c)}{(R_a + R_b + R_c)^2}$$

$$= \frac{R_aR_bR_c}{R_a + R_b + R_c}$$

これと R_3, R_2, R_1 との比を取ると R_a, R_b, R_c が求められる。