電気回路の基本素子
ーキャパシタ（C）とインダクタ（L）ー

渡邉 俊夫

キャパシタとインダクタ

静電容量 C のキャパシタ(コンデンサ)に流れる電流 i と端子間電圧 v の関係は

$$v = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

である。いっぽう、自己インダクタンス L のインダクタ(コイル)に流れる電流 i と端子間電圧 v の関係は

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t$$

である。

キャパシタとインダクタ

角周波数 ω の交流に対して、キャパシタのインピーダンスは

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

であり、端子間の電圧は電流に対して位相が 90° 遅れる。

インダクタのインピーダンスは

$$Z_L = j\omega L$$

であり、端子間の電圧は電流に対して位相が 90° 進む。

本稿では、これらの導出について丁寧に説明する。

キャパシタ

電圧 v を印加したキャパシタ（コンデンサ）に蓄えられる電荷の電気量 q は、キャパシタの静電容量を C として

$$q = Cv$$

である。この電気量 q はキャパシタに流入した電流 i の総和だから

$$v = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{dt}$$

が成り立つ。これが、キャパシタに流れる電流 i と端子間電圧 v の基本関係式である。

キャパシタ

キャパシタに蓄えられる電荷の電気量

$$q = Cv$$

が時間的に変化するとき、単位時間あたりに端子から流入する電気量が電流であるから、電流 i と電圧 v の関係は

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

とも表せる。

キャパシタの交流動作

角周波数 ω の交流において、電流 $i(t) = I_0 \cos \omega t$ を位相の基準とすると

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{C}\int I_0 \cos \omega t \,\mathrm{dt} = \frac{I_0}{C}\int \cos \omega t \,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{I_0}{\omega C}\sin \omega t = \frac{I_0}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

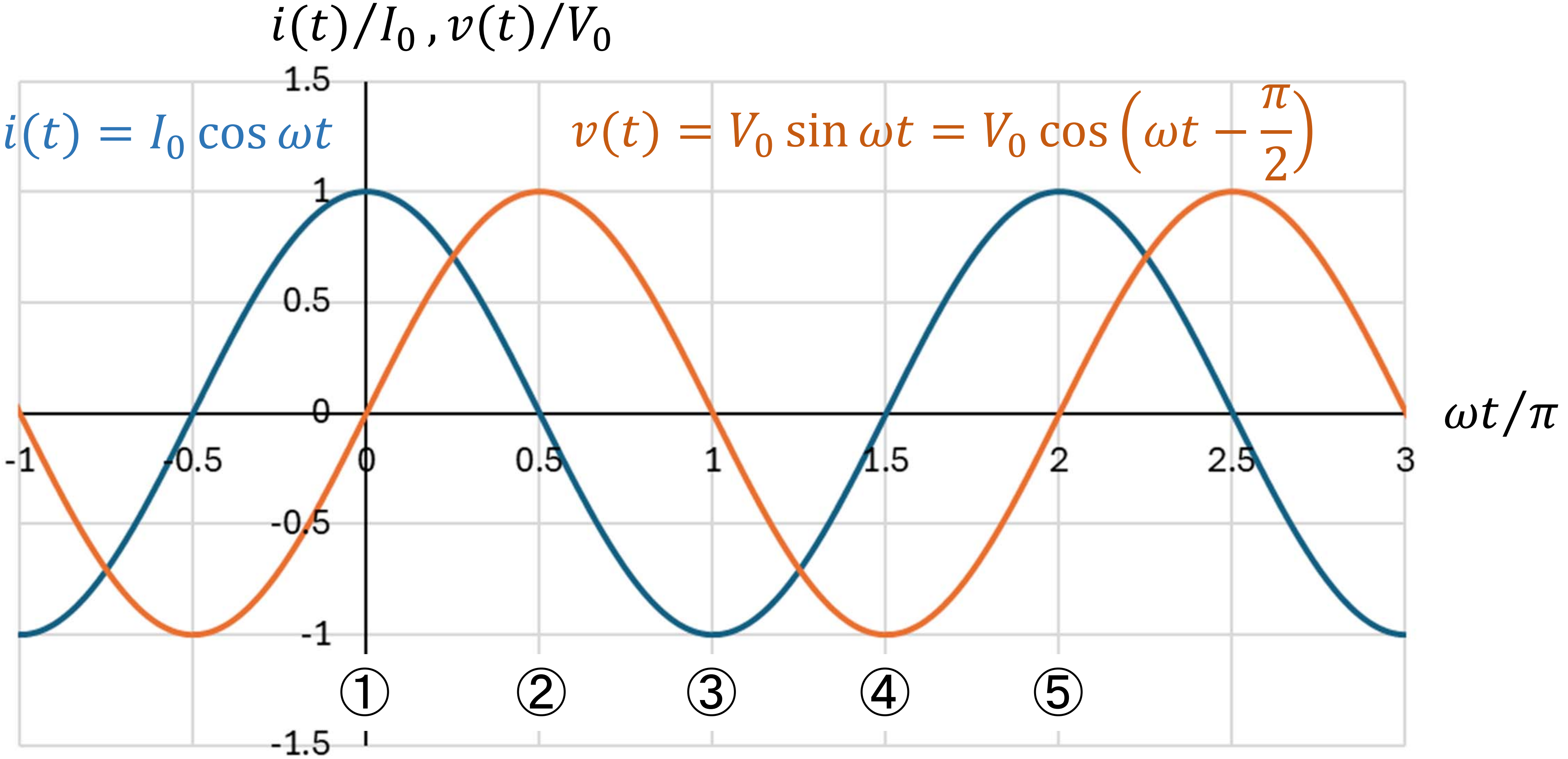
であり、$V_0 = I_0/\omega C$ とすれば

$$v(t) = V_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。したがって、キャパシタの端子間の電圧は電流に対して位相が90°（$\pi/2$）遅れる。

キャパシタの交流動作

交流では、キャパシタの電圧 v は電流 i に対して位相が 90° 遅れる。



キャパシタの交流動作

p. 6のグラフにおいて、周期を $T = 2\pi/\omega$ とすると、

① $t = 0$ で電流は $i = I_0$（最大）であり、このときの電気量は $q = 0$、端子間の電圧は $v = 0$ である。

その後、時間とともにキャパシタが充電されて電気量 q が増加し、端子間の電圧 v も増大する。それにともなって電流 i は減少する。

② $t = \pi/2\omega = T/4$ で $i = 0$ となる。このとき、$v = V_0$（最大）である。

<u>電圧が最大になる②は、電流が最大になる①より $T/4$ 遅い。すなわち、</u>
<u>電圧は電流に対して位相が $90°$ 遅れている。</u>

その後、電流 i は逆方向に流れ、放電によって電気量 q が減少し、端子間の電圧 v も減少する。

キャパシタの交流動作

③ $t = \pi/\omega = T/2$ で $i = -I_0$、$q = 0$、$v = 0$ となる。

その後、時間とともにキャパシタは逆向きに充電され（$q < 0$）、端子間の電圧も逆向き（$v < 0$）となる。それにともなって電流 i（< 0）は 0 に近づく。

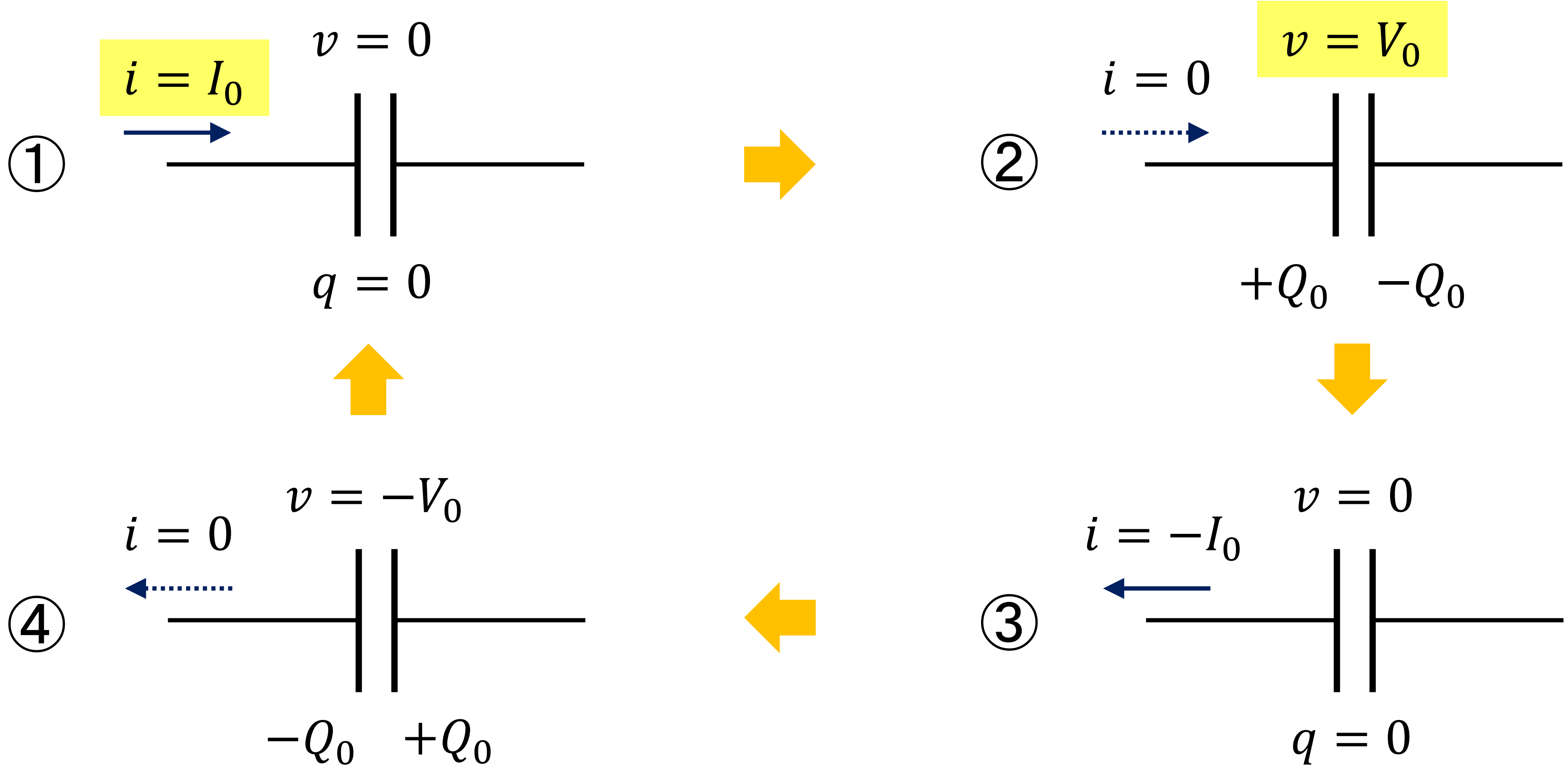
④ $t = 3\pi/2\omega = 3T/4$ で $i = 0$ となる。このとき、$v = -V_0$ である。

その後、電流 i は正方向に流れ、放電によって逆向きの電荷の電気量 q（< 0）は 0 に近づき、端子間の逆向きの電圧 v（< 0）も 0 に近づく。

⑤ $t = 2\pi/\omega = T$ で $i = I_0$（最大）、$v = 0$ となり、①と同じ状態に戻る。

キャパシタの交流動作

交流におけるキャパシタの動作は、下図のようになる。



三角関数の計算

p. 5の計算では、三角関数の積分公式

$$\int \cos\omega t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

を用いた。また、加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ より

$$\sin\omega t = \cos\omega t\cos\frac{\pi}{2} + \sin\omega t\sin\frac{\pi}{2} = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

あるいは、余角の公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ より

$$\sin\omega t = \sin(-\omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega t)\right) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いた。

複素数による計算

これらは、三角関数の複素表示

$$\cos \omega t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}, \qquad \sin \omega t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2j}$$

を用いて

$$\int \cos \omega t \, \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{j\omega \cdot 2} = \frac{1}{\omega} \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2j}$$

$$= \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

複素数による計算

および

$$\sin \omega t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2j} = -j\,\frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2} = \frac{-j\mathrm{e}^{j\omega t} + j\mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-j\pi/2}\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{j\pi/2}\mathrm{e}^{-j\omega t}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{j(\omega t - \pi/2)} + \mathrm{e}^{-j(\omega t - \pi/2)}}{2}$$

$$= \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

と計算することもできる。

複素数による計算

さらに、$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{j\omega t}$ とすれば

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int I_0 \mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{I_0}{j\omega C}\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$= \frac{I_0}{\omega C}\mathrm{e}^{-j\pi/2}\mathrm{e}^{j\omega t} = \frac{I_0}{\omega C}\mathrm{e}^{j(\omega t - \pi/2)}$$

より、キャパシタの端子間の電圧は電流に対して位相が 90° 遅れることが（三角関数の公式を用いなくても）わかる。

キャパシタのインピーダンス

角周波数 ω の交流に対して、キャパシタの端子間電圧は

$$v = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = \frac{i}{j\omega C}$$

であり、キャパシタの**インピーダンス**は

$$Z_C = \frac{v}{i} = \frac{\frac{i}{j\omega C}}{i} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

である。式中の $1/j = -j$ は、端子間の**電圧の位相が電流に対して 90° 遅れる**ことを表している。
また、キャパシタのインピーダンスは角周波数 ω に反比例し、周波数が低いほど大きくなる。定常状態では直流は遮断される。

インダクタ

電流 i が流れているインダクタ(コイル)に鎖交する磁束 ϕ は、インダクタの自己インダクタンスを L として

$$\phi = Li$$

である。磁束が時間的に変化すると、ファラデーの電磁誘導の法則により、起電力

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

が生じる。ここで、$-$ 符号は、起電力が磁束(および電流)の変化を妨げる向きに生じることを表す。

インダクタ

起電力 $\mathcal{E}$ が生じているとき、インダクタの端子間の電圧降下は

$$v = -\mathcal{E}$$

であるから

$$v = -\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つ。これが、インダクタに流れる電流 I と端子間電圧 V の基本関係式である。

インダクタ

また、微分の逆演算が積分であることから、電流 i と電圧 v の関係は

$$i = \frac{\phi}{L} = \frac{1}{L}\int v\mathrm{dt}$$

とも表せる。これは、インダクタの鎖交磁束 ϕ が誘導起電力による端子間の電圧降下 v の総和で決まることを表している。

インダクタの交流動作

角周波数 ω の交流において、電流 $i(t) = I_0 \cos\omega t$ を位相の基準とすると

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_0\cos\omega t) = LI_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t)$$

$$= -\omega LI_0\sin\omega t = \omega LI_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

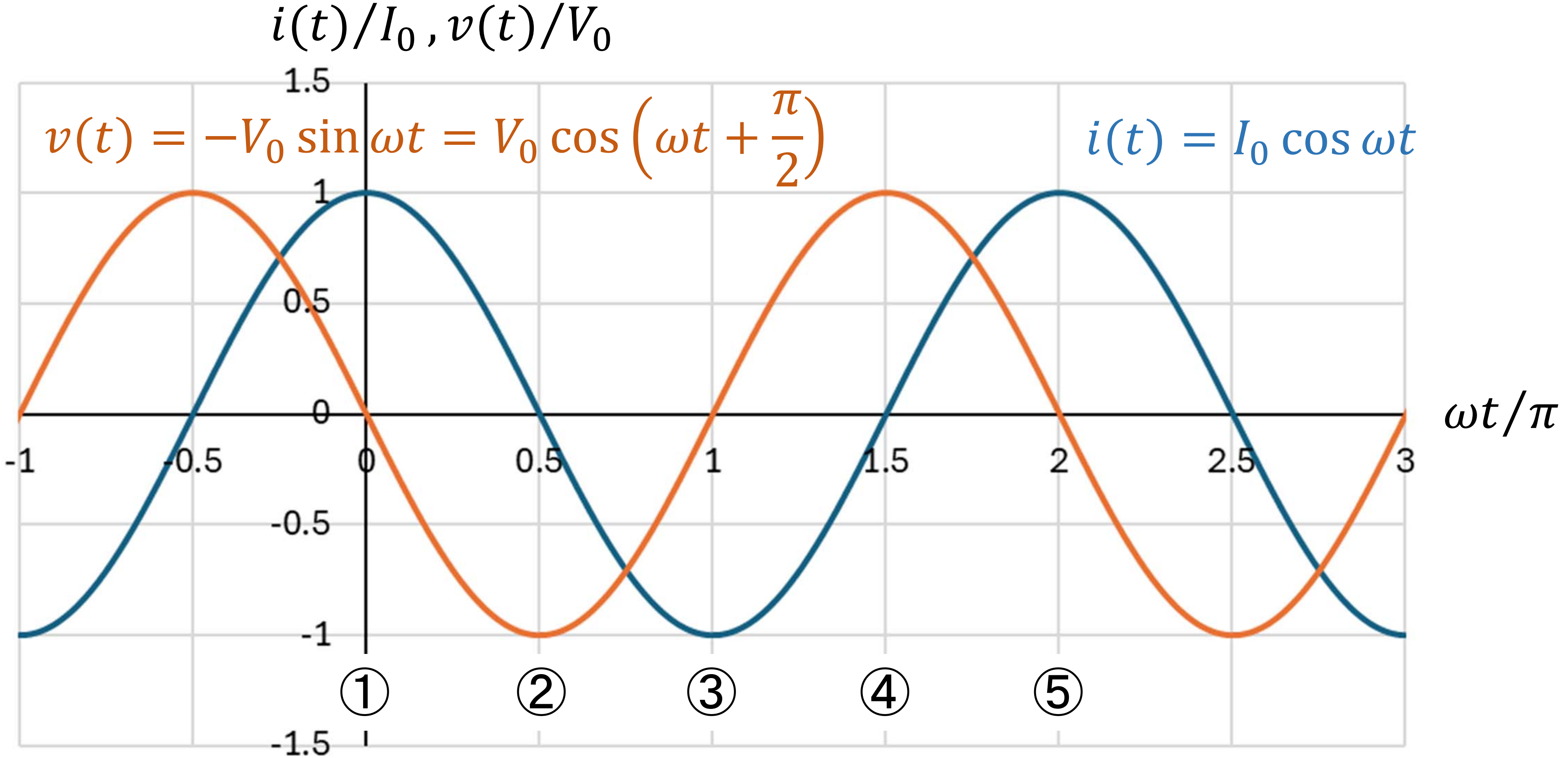
であり、$V_0 = \omega LI_0$ とすれば

$$v(t) = V_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。したがって、インダクタの端子間の電圧は電流に対して位相が 90° (π/2) 進む。

インダクタの交流動作

交流では、インダクタの電圧 v は電流 i に対して位相が 90° 進む。



インダクタの交流動作

p. 19のグラフにおいて、周期を $T = 2\pi/\omega$ とすると、

① $t = 0$ で電流は $i = I_0$（最大）であり、電流の時間変化は $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$ である。このとき誘導起電力は $\mathcal{E} = 0$ であり、端子間の電圧は $v = 0$ である。

その後、時間とともに電流 i が減少し、それを妨げるように誘導起電力が発生し、端子間の電圧降下は逆向き（$v < 0$）となる。

② $t = \pi/2\omega = T/4$ で $I = 0$ となる。このとき、$v = -V_0$ である。

その後、電流 i は逆方向に流れるが、時間変化 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ は 0 に近づく。それにともなって端子間の逆向きの電圧降下 v（< 0）も 0 に近づく。

インダクタの交流動作

③ $t = \pi/\omega = T/2$ で $i = -I_0$、$v = 0$ となる。

その後、時間とともに逆方向の電流 $i(< 0)$ は 0 に近づく。それを妨げるように誘導起電力が発生し、端子間に電圧降下 $v(> 0)$ が生じる。

④ $t = 3\pi/2\omega = 3T/4$ で $i = 0$ となる。このとき、$v = V_0$（最大）である。

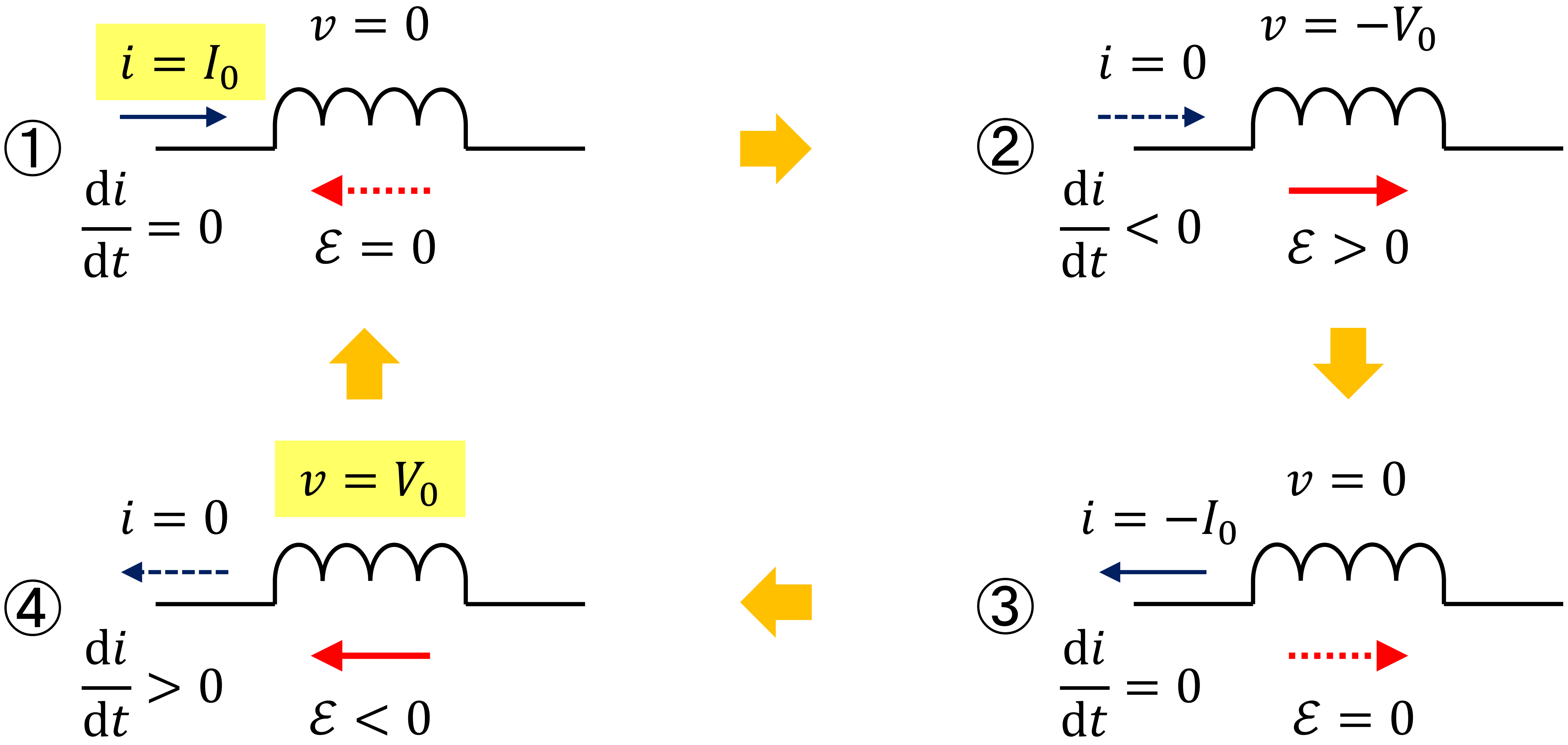
その後、電流 i は正方向に流れるが、時間変化 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ は 0 に近づく。端子間の電圧降下 $v(> 0)$ も減少して 0 に近づく。

⑤ $t = 2\pi/\omega = T$ で $i = I_0$（最大）、$v = 0$ となり、①と同じ状態に戻る。

電圧が最大になる④は、電流が最大になる⑤より $T/4$ 早い。すなわち、
電圧は電流に対して位相が 90° 進んでいる。

インダクタの交流動作

交流におけるインダクタの動作は、下図のようになる。



三角関数の計算

p. 18の計算では、三角関数の微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t) = -\omega\sin\omega t$$

を用いた。また、加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ より

$$-\sin\omega t = \cos\omega t\cos\frac{\pi}{2} - \sin\omega t\sin\frac{\pi}{2} = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

あるいは、余角の公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ より

$$-\sin\omega t = \sin(-\omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega t)\right) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いた。

複素数による計算

これらは、三角関数の複素表示

$$\cos\omega t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}, \qquad \sin\omega t = \frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2j}$$

を用いて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}\right) = j\omega\,\frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}$$

$$= -\omega\,\frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2j} = -\omega\sin\omega t$$

複素数による計算

および

$$-\sin\omega t = -\frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2j} = j\frac{\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t}}{2} = \frac{j\mathrm{e}^{j\omega t} - j\mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \frac{j\mathrm{e}^{j\omega t} + (-j)\mathrm{e}^{-j\omega t}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{j\pi/2}\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\pi/2}\mathrm{e}^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{j(\omega t+\pi/2)} + \mathrm{e}^{-j(\omega t+\pi/2)}}{2} = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

と計算することもできる。

複素数による計算

さらに、$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{j\omega t}$ とすれば

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0 \mathrm{e}^{j\omega t}\right) = j\omega L I_0 \mathrm{e}^{j\omega t} = j\omega L I_0 \mathrm{e}^{j\pi/2} \mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$= j\omega L I_0 \mathrm{e}^{j(\omega t + \pi/2)}$$

より、インダクタの端子間の電圧は電流に対して位相が 90° 進むことが
（三角関数の公式を用いなくても）わかる。

インダクタのインピーダンス

角周波数 ω の交流に対して、インダクタの端子間電圧は

$$v = -\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = j\omega Li$$

であり、インダクタのインピーダンスは

$$Z_L = \frac{v}{i} = \frac{j\omega Li}{i} = j\omega L$$

である。式中の j は、端子間の電圧の位相が電流に対して 90° 進むことを表している。

また、インダクタのインピーダンスは角周波数 ω に比例し、高周波数ほど大きくなる。

まとめ

静電容量 C のキャパシタ（コンデンサ）に流れる電流 i と端子間電圧 v の関係は、蓄えられた電荷の電気量を q として

$$v = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

である。いっぽう、自己インダクタンス L のインダクタ（コイル）に流れる電流 i と端子間電圧 v の関係は、鎖交する磁束を ϕ として

$$v = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad i = \frac{\phi}{L} = \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t$$

である。

まとめ

角周波数 ω の交流に対して、キャパシタのインピーダンスは

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$

であり、端子間の電圧は電流に対して位相が 90° 遅れる。

インダクタのインピーダンスは

$$Z_L = j\omega L$$

であり、端子間の電圧は電流に対して位相が 90° 進む。