

2019年度(R1年度)前期
電気電子工学科

物理学基礎AI (第7回) —束縛運動—

2019年6月3日

第7回の要点

- 床や斜面の上の物体には**垂直抗力**が働き、運動がその面上に限定される。
- 単振り子では、糸からおもりに**張力**が働き、運動が円周上に限定される。
- 束縛運動では、**束縛条件(拘束条件)**を考慮して運動方程式を解く必要がある。

力のつり合い

物体が静止しているとき

(A) 物体には何の力も働いていない

(B) 物体に働く力がつり合っている

のいずれかである。

1つの質点に働く2つの力 F_1, F_2 がつり合う条件は

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$$

N 個の力が働く場合のつり合いの条件は

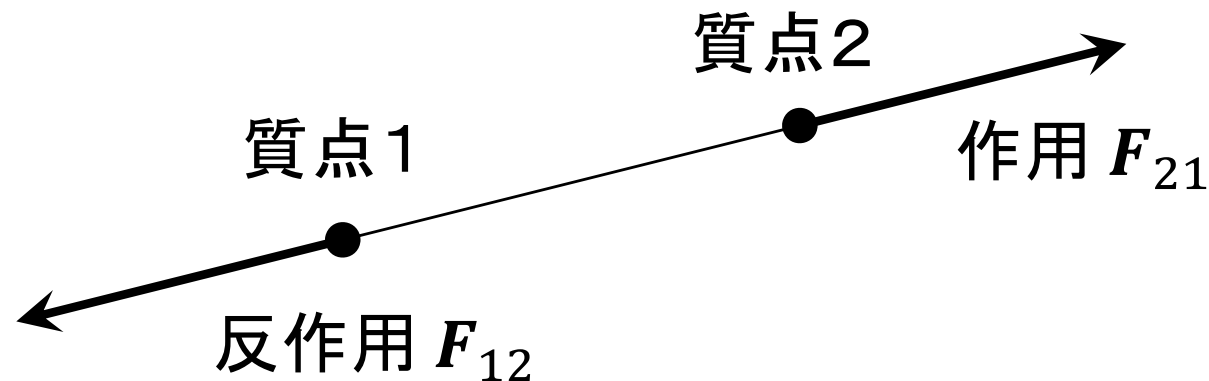
$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k = \mathbf{0}$$

作用と反作用

物体1が物体2に力(作用) F_{21} を及ぼすとき、物体2は物体1に力(反作用) F_{12} を及ぼす。

運動の第3法則より $F_{21} = -F_{12}$

作用と反作用は、それぞれ異なる物体に働いている力であることに注意。

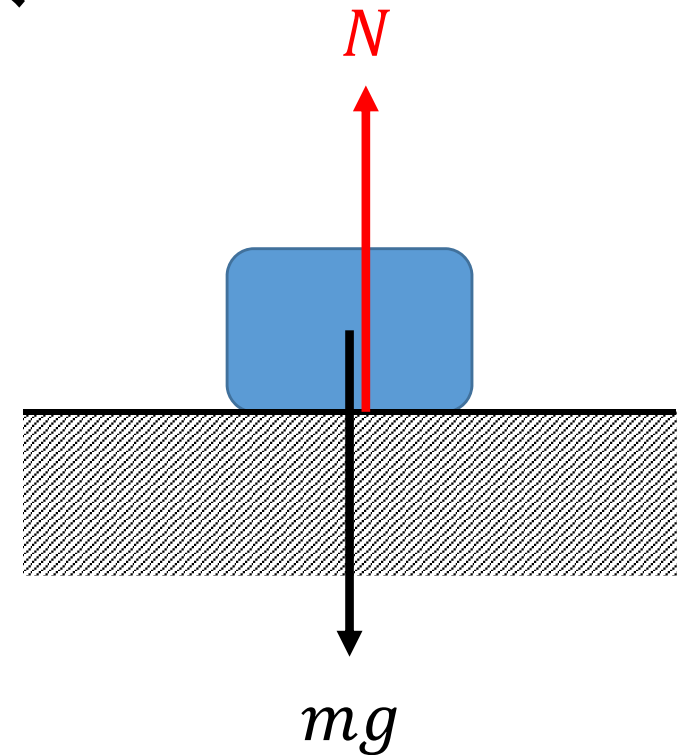


垂直抗力

床の上で静止している質量 m の物体には、鉛直上向きを正とすると、重力 $-mg$ のほかに、床からの**垂直抗力** N が働き、2つの力がつり合っている。

$$N - mg = 0$$

物体が床から受ける作用 $N = mg$ に対して、物体は床に反作用 $-mg$ を及ぼす。



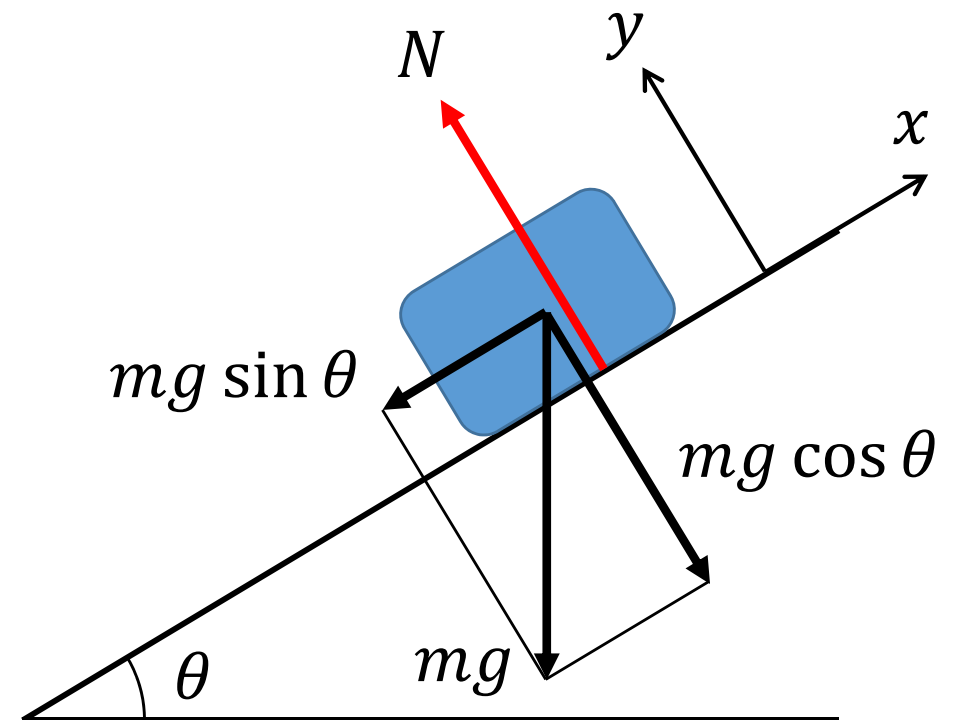
斜面を滑る物体の運動

角度 θ の固定された斜面に沿って質量 m の物体が滑りおりるとき、物体には斜面から垂直抗力 N が働く。

斜面に沿って x 軸、それに垂直に y 軸をとると、
運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = N - mg \cos \theta$$



斜面を滑る物体の運動

角度 θ の斜面に沿って滑りおける物体の運動方程式は、斜面に沿って x 軸、それに垂直に y 軸をとると

$$m\ddot{x} = -mg \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = N - mg \cos \theta$$

ここで、物体が斜面に沿って運動するという束縛条件 (拘束条件) より $y = 0$ であるから $\ddot{y} = 0$

$$\therefore N = mg \cos \theta$$

すなわち、 y 方向の力はずりあっている。

また、 x 方向の運動は、加速度 $\ddot{x} = -g \sin \theta$ の等加速度運動である。

斜面を滑る物体の運動

水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとった場合、
物体の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -N \sin \theta$$

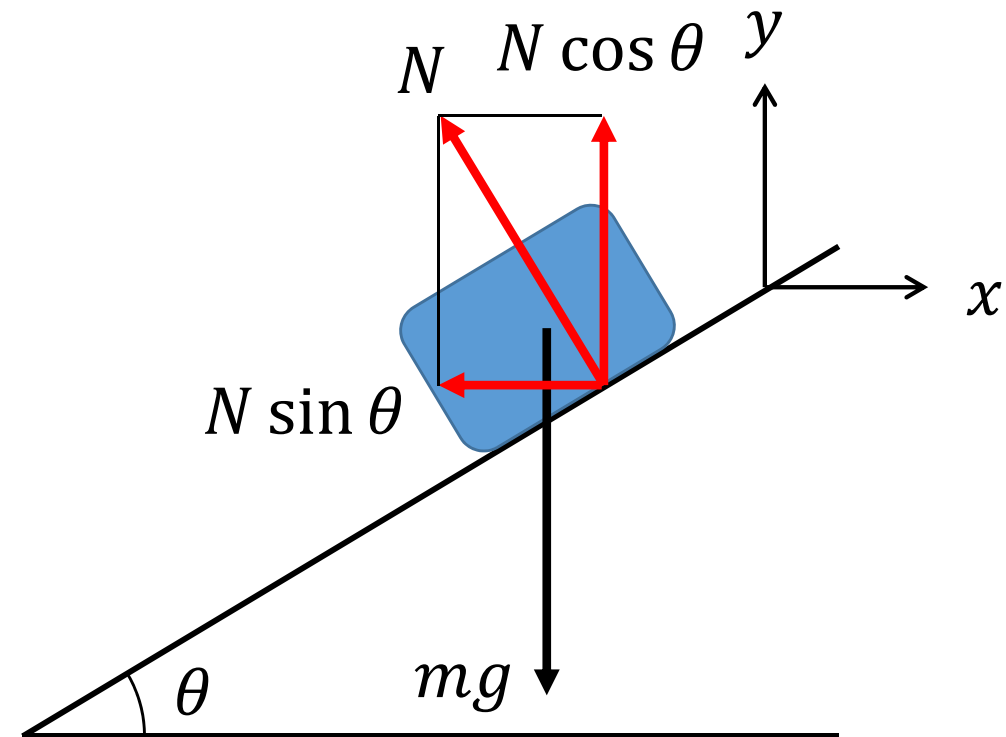
$$m\ddot{y} = N \cos \theta - mg$$

垂直抗力 N は未知数なので
これだけでは解けない。

この場合の束縛条件は

$$y = x \tan \theta$$

$$\therefore \ddot{y} = \ddot{x} \tan \theta$$



斜面を滑る物体の運動

水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとった場合、
束縛条件より $\dot{y} = \dot{x} \tan \theta$ だから、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -N \sin \theta$$

$$m\ddot{x} \tan \theta = N \cos \theta - mg$$

これより垂直抗力 N を消去して

$$m\ddot{x}(\cos \theta + \tan \theta \sin \theta) = -mg \sin \theta$$

$$\therefore m\ddot{x} = -mg \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore m\ddot{y} = -mg \sin \theta \cos \theta \tan \theta = -mg \sin^2 \theta$$

したがって、 x 方向は $\ddot{x} = -g \sin \theta \cos \theta$ 、 y 方向は
 $\ddot{y} = -g \sin^2 \theta$ の等加速度運動である。

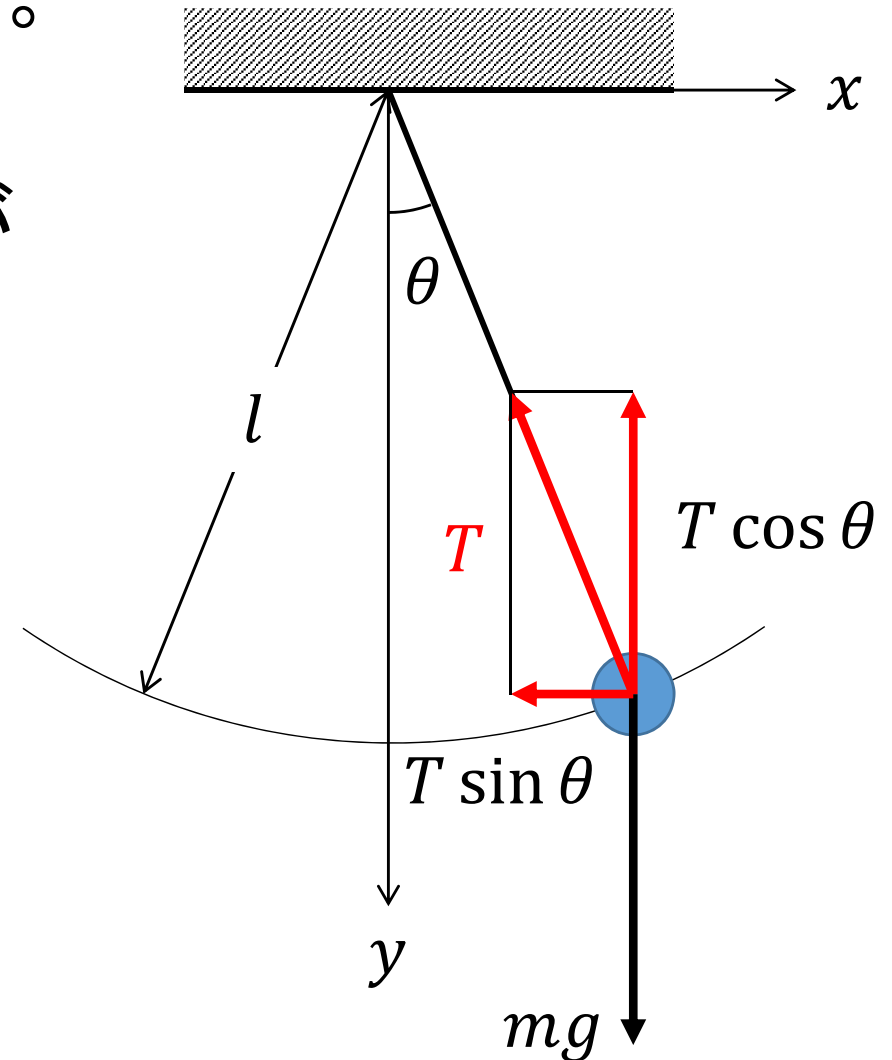
単振り子

長さ l の糸の先に質量 m のおもりをつるして鉛直面内で振らせたものを**単振り子**という。

単振り子では、糸からおもりに**張力** T が働いて、運動の軌道が半径 l の円周上に限定される。水平方向に x 軸、鉛直下向きに y 軸をとると、**運動方程式**は

$$m\ddot{x} = -T \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = -T \cos \theta + mg$$



単振り子

単振り子の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -T \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = -T \cos \theta + mg$$

ここで、

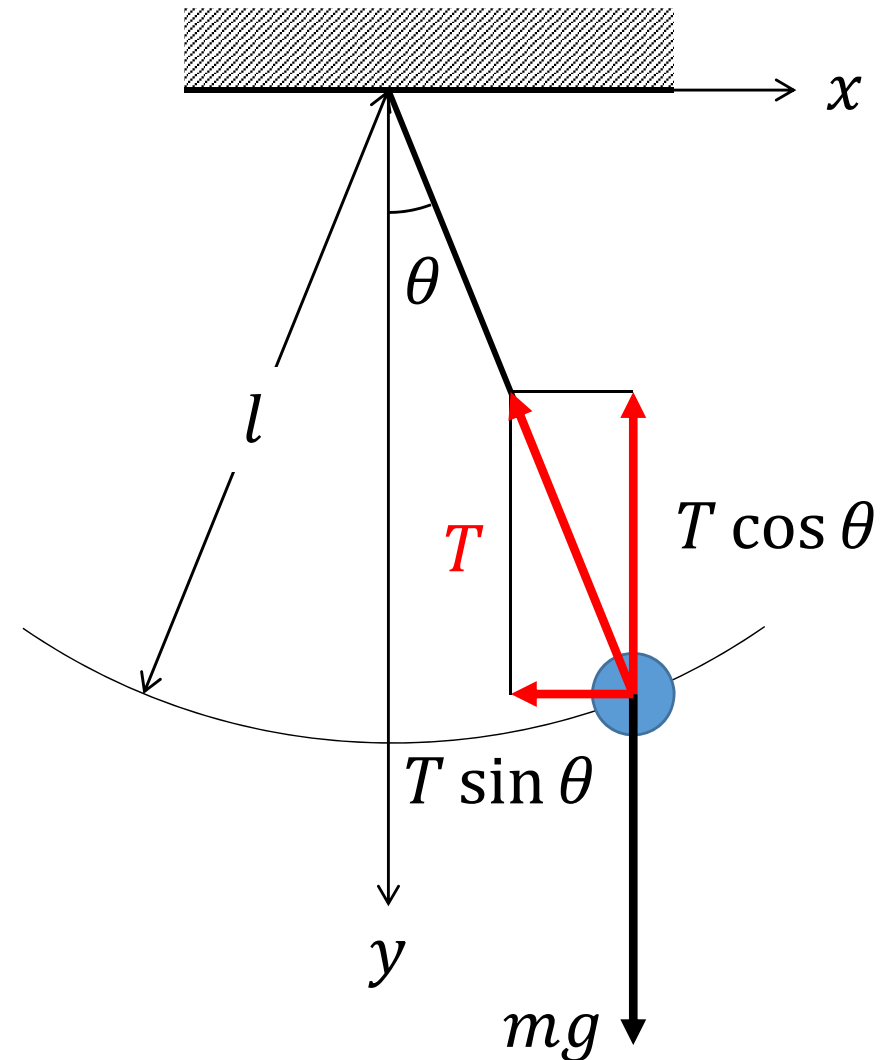
$$x = l \sin \theta, \quad y = l \cos \theta$$

とおくと、 l が一定であるという
束縛条件より

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\ddot{x} = l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$\ddot{y} = -l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta$$



単振り子

単振り子の運動方程式より

$$ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -T \sin \theta$$

$$-ml(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = -T \cos \theta + mg$$

これより、張力 T を消去すると

$$ml\ddot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -mg \sin \theta$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

単振り子

単振り子の運動方程式より

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

ここで

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

であるから、 $\theta \ll 1$ のとき

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

これは $\omega^2 = \frac{g}{l}$ の単振動の式と同じである。

第7回のまとめ

- 床や斜面の上の物体には**垂直抗力**が働き、運動がその面上に限定される。
- 単振り子では、糸からおもりに**張力**が働き、運動が円周上に限定される。
- 束縛運動では、**束縛条件(拘束条件)**を考慮して運動方程式を解く必要がある。

摩擦力

床の上の物体には、一般に**摩擦力**が働く。

- 床の上に静止した物体に加えた水平方向の外力が小さいうちは、**静止摩擦力**が外力とつり合い、物体は静止したままである。
- 外力が垂直抗力 N に比例する**最大静止摩擦力** $R_{max} = \mu N$ を超えると、物体は滑り始める。比例係数 μ を静止摩擦係数という。
- 床の上を滑る物体には、垂直抗力 N に比例する**動摩擦力** $R = \mu' N$ が速度と逆向きに働く。比例係数 μ' を動摩擦係数という。通常 $\mu > \mu'$ である。