

2019年度(R1年度)前期

物理学基礎AI (第6回)

—単振動(3)—

2019年5月27日

第6回の概要

- 速度に比例する抵抗力と復元力を受ける振動子に角振動数 Ω の外力が働く場合、過渡解が減衰した後、定常解の強制振動が残る。
- 強制振動は、外力と同じ角振動数 Ω の単振動であるが、位相 α は外力と異なる。
- 強制振動の振幅は、外力の角振動数 Ω が振動子の固有振動数 ω の付近のときに最大となる。

抵抗を受ける振動子

質点がつり合いの位置からの距離に比例する復元力と速度に比例する抵抗力を受けるときの運動を考える。

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

ここで、 $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{2m}$ 、 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ とおけば

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega^2x = 0$$

抵抗を受ける振動子

初期条件を $t = 0$ で $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ とすると

① $\omega > \frac{1}{\tau}$ の場合、減衰振動

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-t/\tau} \sin \omega_1 t$$

② $\omega < \frac{1}{\tau}$ の場合、過減衰

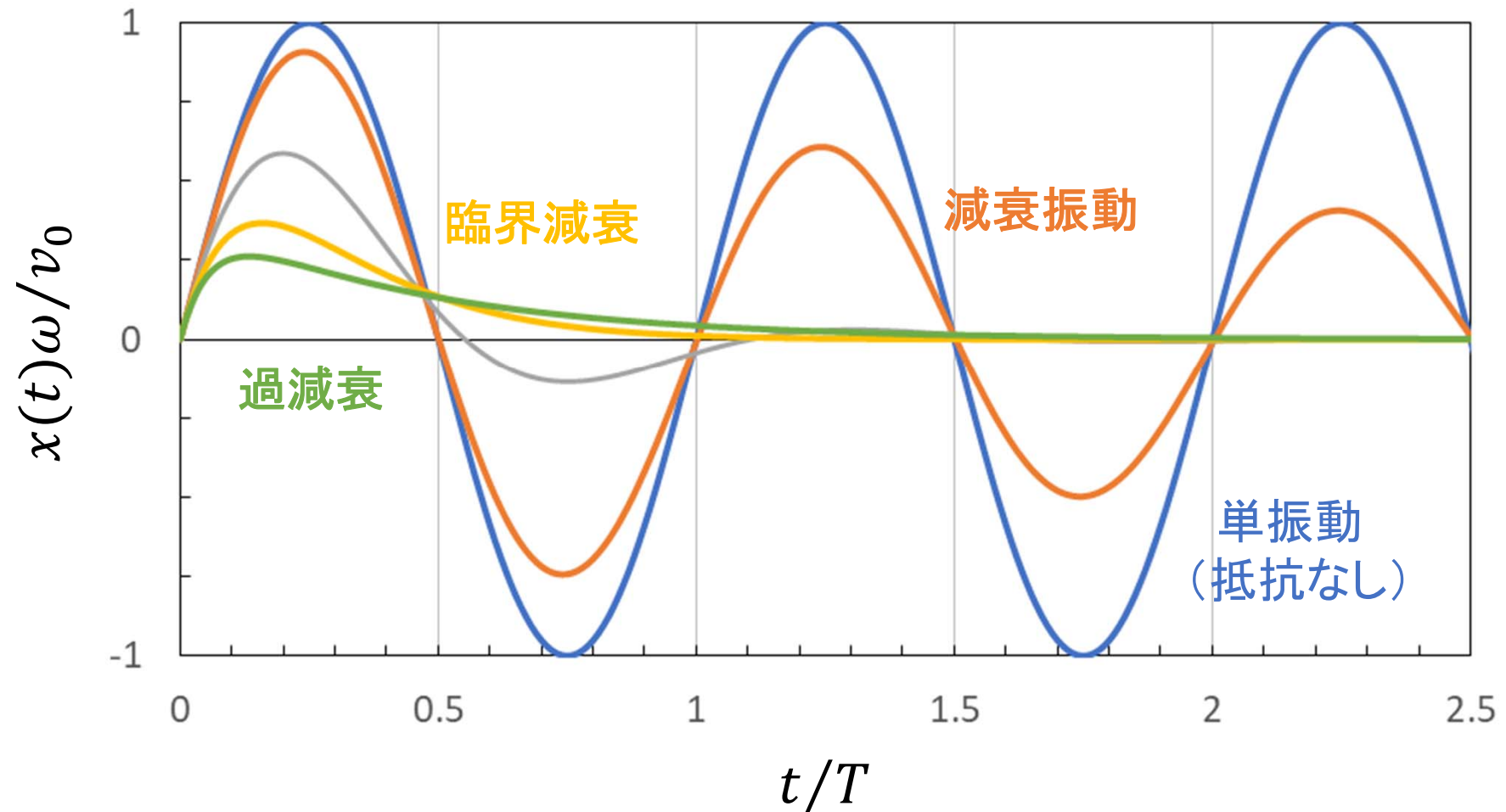
$$x(t) = v_0 \tau_1 e^{-t/\tau} \frac{e^{t/\tau_1} - e^{-t/\tau_1}}{2} = v_0 \tau_1 e^{-t/\tau} \sinh \frac{t}{\tau_1}$$

③ $\omega = \frac{1}{\tau}$ の場合、臨界減衰

$$x(t) = v_0 t e^{-t/\tau}$$

抵抗を受ける振動子

初期条件を $t = 0$ で $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ とすると



強制振動：運動方程式

抵抗を受ける振動子に、角振動数 Ω の外力 $F_0 \cos \Omega t$ が働く場合の運動を考える。**運動方程式**は

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx + F_0 \cos \Omega t$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

ここで、 $\tau = \frac{2m}{\gamma}$ 、 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ とおけば

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

強制振動：運動方程式の解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

の解は

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

の形に書ける。

$x_1(t)$: 外力 = 0 の解 (前回で求めたもの)
初期条件から決まる定数を含む
時間 t とともに減衰する過渡解

$x_2(t)$: 外力 $\neq 0$ の解
過渡解が減衰した後に残る定常解

強制振動：定常解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

の定常解を

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

と仮定すると

$$\dot{x}(t) = -x_0 \Omega \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha)$$

より

$$(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \alpha) - \frac{2\Omega}{\tau} \sin(\Omega t + \alpha) = \frac{F_0}{m x_0} \cos \Omega t$$

強制振動：定常解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式より

$$(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \alpha) - \frac{2\Omega}{\tau} \sin(\Omega t + \alpha) = \frac{F_0}{m x_0} \cos \Omega t$$

三角関数の加法定理を用いて

$$\begin{aligned} &(\omega^2 - \Omega^2)(\cos \Omega t \cos \alpha - \sin \Omega t \sin \alpha) \\ &\quad - \frac{2\Omega}{\tau} (\sin \Omega t \cos \alpha + \cos \Omega t \sin \alpha) = \frac{F_0}{m x_0} \cos \Omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left((\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha - \frac{2\Omega}{\tau} \sin \alpha \right) \cos \Omega t \\ &\quad - \left((\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + \frac{2\Omega}{\tau} \cos \alpha \right) \sin \Omega t = \frac{F_0}{m x_0} \cos \Omega t \end{aligned}$$

強制振動：定常解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式より

$$\begin{aligned} & \left((\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha - \frac{2\Omega}{\tau} \sin \alpha \right) \cos \Omega t \\ & - \left((\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + \frac{2\Omega}{\tau} \cos \alpha \right) \sin \Omega t = \frac{F_0}{m x_0} \cos \Omega t \end{aligned}$$

これが成り立つには

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha - \frac{2\Omega}{\tau} \sin \alpha = \frac{F_0}{m x_0} & \cdots (1) \\ (\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + \frac{2\Omega}{\tau} \cos \alpha = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

強制振動：定常解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式より

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha - \frac{2\Omega}{\tau} \sin \alpha = \frac{F_0}{m x_0} & \cdots (1) \\ (\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + \frac{2\Omega}{\tau} \cos \alpha = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

(1)式の2乗 + (2)式の2乗より

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{2\Omega}{\tau}\right)^2 &= \left(\frac{F_0}{m x_0}\right)^2 \\ \therefore x_0 &= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\Omega/\tau)^2}} \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

強制振動：定常解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式より

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha - \frac{2\Omega}{\tau} \sin \alpha = \frac{F_0}{m x_0} & \cdots (1) \\ (\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + \frac{2\Omega}{\tau} \cos \alpha = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

(2)式より

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\Omega}{\tau} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$\therefore \alpha = -\tan^{-1} \left(\frac{2\Omega}{\tau} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \right)$$

強制振動：定常解

角振動数 Ω の外力が働く振動子の運動方程式の定常解は

$$x = x_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

ただし、

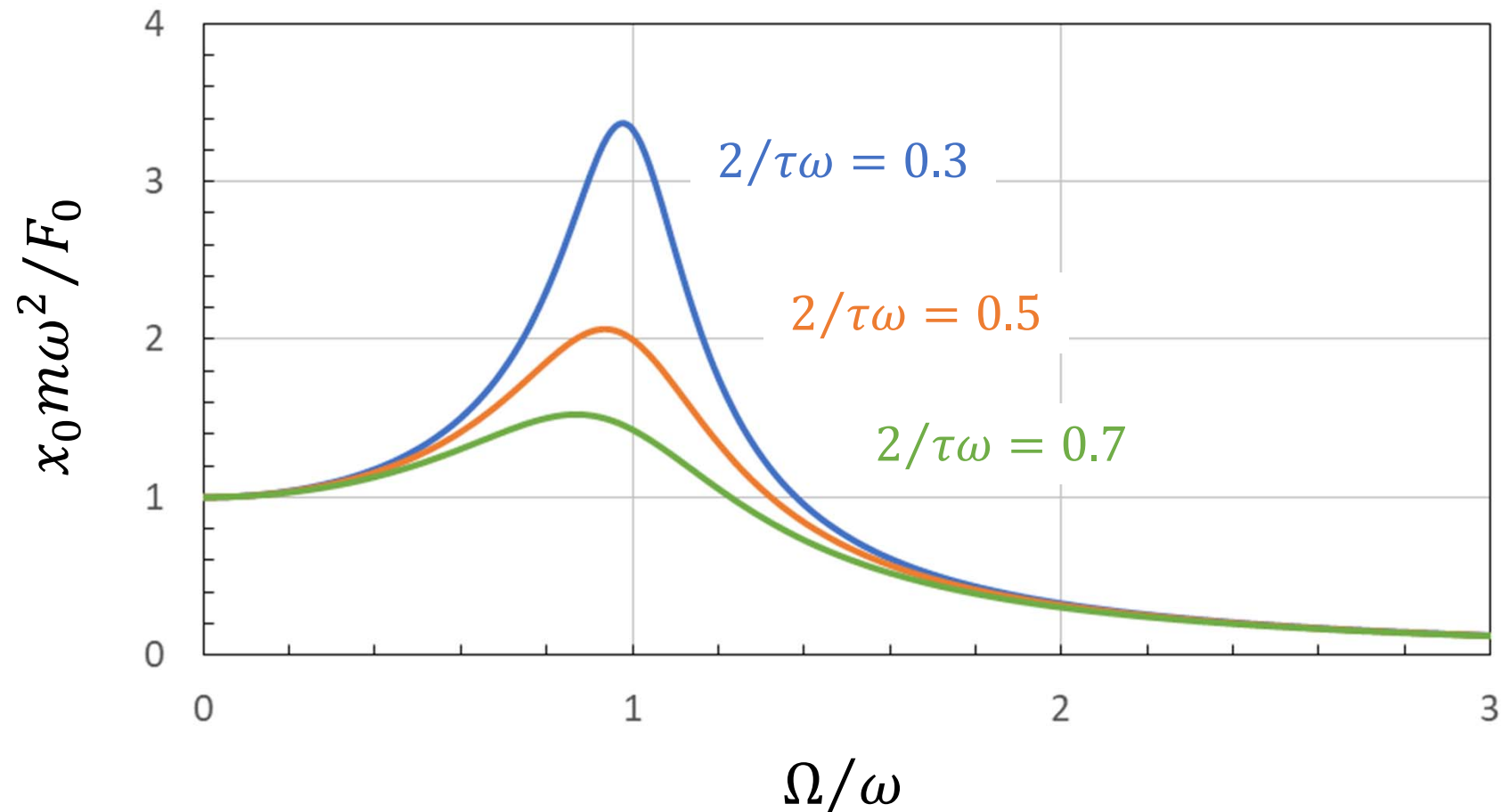
振幅
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\Omega/\tau)^2}} \frac{F_0}{m}$$

初期位相
$$\alpha = -\tan^{-1} \left(\frac{2\Omega}{\tau} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \right)$$

この単振動を強制振動という。

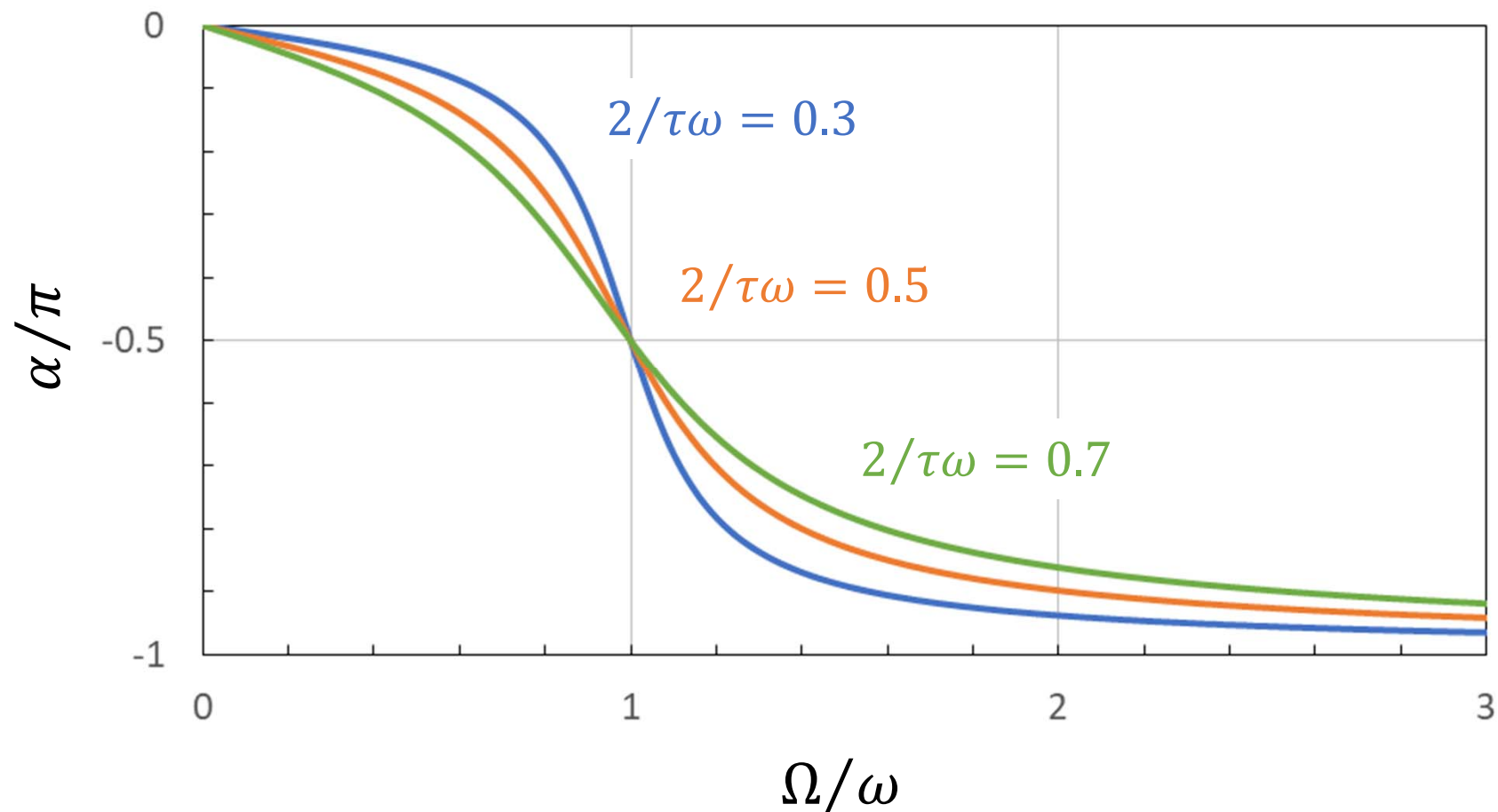
強制振動：定常解

抵抗が小さいとき、振幅は $\Omega = \omega$ の付近で最大となる。
これを共振という。



強制振動：定常解

定常解の位相は $\Omega = \omega$ では外力に対して 90° 遅れる。
低振動数では 0° 、高振動数では 180° 遅れる。



第6回のまとめ

- 速度に比例する抵抗力と復元力を受ける振動子に角振動数 Ω の外力が働く場合、過渡解が減衰した後、定常解の強制振動が残る。
- 強制振動は、外力と同じ角振動数 Ω の単振動であるが、位相 α は外力と異なる。
- 強制振動の振幅は、外力の角振動数 Ω が振動子の固有振動数 ω の付近のときに最大となる。