2019年度（H31/R1年度）前期

物理学基礎AI
（第3回）
ー運動の法則（２）ー

2019年4月22日

第3回の要点

- 質量 m の質点に力 F が働くときに生じる加速度を a とすると、運動方程式
$$F = ma$$
が成り立つ。
- 空気中を（小さな）速度 v で運動する物体には
$$F = -\gamma v$$
という抵抗力が働く。
- 与えられた初期条件のもとで、運動方程式を時間 t で積分すれば、質点の速度と位置を求めることができる。

加速度と速度

速度は位置の時間微分、位置は速度の時間積分

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt + y(0) = \int_0^t v(t) dt + y(0)$$

加速度は速度の時間微分、速度は加速度の時間積分

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$$

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(t) dt + v(0) = \int_0^t a(t) dt + v(0)$$

前回の復習

運動方程式：自由落下

質点が高さ h から初速度0で落下する場合を考える。

鉛直上向きに y 軸をとると、運動方程式より

$$m\ddot{y}(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = -mg \qquad \therefore \frac{dv(t)}{dt} = -g$$

これを時間 t で積分すると

$$v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{dv(t)}{dt} dt = \int_0^t -g dt = -gt$$

初期条件は $t = 0$ で $v(0) = 0$ だから

$$v(t) = -gt$$

前回の復習

運動方程式：自由落下

運動方程式より求めた速度は

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -gt$$

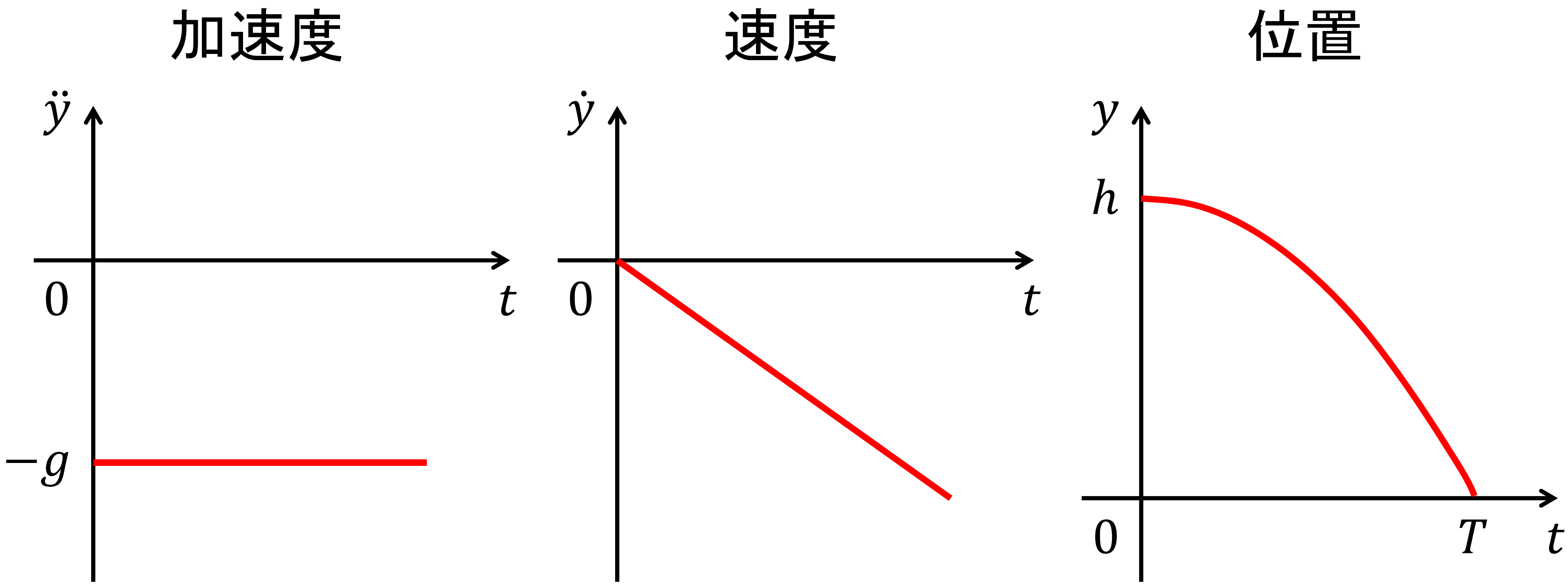
これを時間 t で積分すると

$$y(t) - y(0) = \int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_0^t (-gt) dt = -\frac{1}{2} g t^2$$

初期条件は $t = 0$ で $y(0) = h$ だから

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

運動方程式の解：自由落下



$$\ddot{y}(t) = -g$$

$$\dot{y}(t) = -gt$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

空気抵抗(粘性抵抗)

空気中を(小さな)速度 v で運動する物体には

$$F = -\gamma v$$

という抵抗力が働く。抵抗力の向きは、物体の運動と逆向きである。比例定数 γ を(粘性)抵抗係数という。

速度に比例する抵抗力は媒質(空気)の粘性によるものであり、抵抗係数 γ は物体の大きさや形状に依存する。物体が半径 a の球の場合、媒質の粘性係数を η とすると

$$\gamma = 6\pi a\eta$$

である。空気の粘性係数は $\eta = 1.8 \times 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot s/m^2}$ である。

空気抵抗がある場合の自由落下

質点が高さ h から初速度0で落下する場合を考える。

鉛直上向きに y 軸をとると、質点には重力と抵抗力が働くから、運動方程式より

$$m\ddot{y} = m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - \gamma v(t)$$

$$\therefore \frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{\gamma}{m}v(t) = -\frac{\gamma}{m}\left(v_f + v(t)\right)$$

$$= -\frac{v_f + v(t)}{\tau}$$

ここで、 $v_f = \dfrac{mg}{\gamma}, \quad \tau = \dfrac{m}{\gamma}$

空気抵抗がある場合の自由落下

運動方程式より

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v_f + v(t)}{\tau}$$

$$\frac{1}{v_f + v(t)}\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$

これを時間 t で積分すると

$$\int_0^t \frac{1}{v_f + v(t)}\frac{dv(t)}{dt}dt = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v_f + v(t)} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

空気抵抗がある場合の自由落下

運動方程式の時間積分は

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v_f + v(t)} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

$$\log\left|v_f + v(t)\right| - \log\left|v_f + v(0)\right| = -\frac{1}{\tau}t$$

$$\log\left|\frac{v_f + v(t)}{v_f + v(0)}\right| = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{v_f + v(t)}{v_f + v(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore v(t) = -v_f + \left(v_f + v(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

空気抵抗がある場合の自由落下

運動方程式の時間積分より

$$v(t) = -v_f + \left(v_f + v(0)\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

初期条件は $t = 0$ で $v(0) = 0$ だから

$$v(t) = -v_f + v_f e^{-\frac{t}{\tau}} = -v_f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

ここで

$$v_f = \frac{mg}{\gamma}$$

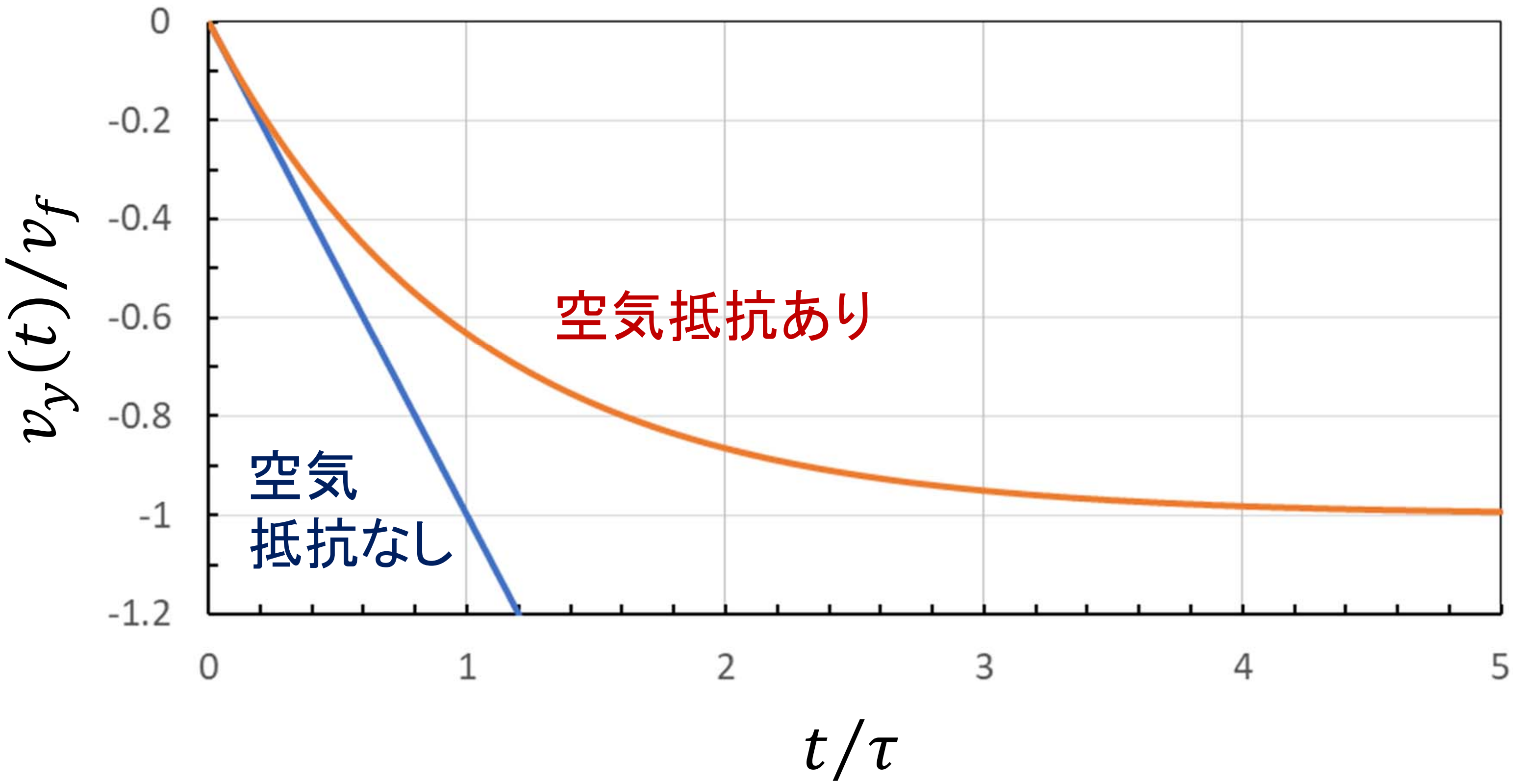
は $t \to \infty$ における速度の大きさであり、終速度という。

また、τ は終速度に近づく時間を表す定数である。

空気抵抗がある場合の自由落下

質点が高さ h から初速度0で落下する場合の速度は

$$v(t) = -v_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$



空気抵抗がある場合の自由落下

運動方程式より求めた速度は

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -v_f(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

これを**時間 t で積分**すると

$$y(t) - y(0) = \int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = -v_f \int_0^t (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\, dt$$

$$= -v_f(t + \tau(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1))$$

$$= -v_f t + v_f \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

空気抵抗がある場合の自由落下

速度の時間積分より

$$y(t) - y(0) = -v_f t + v_f \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

初期条件は $t = 0$ で $y(0) = h$ だから

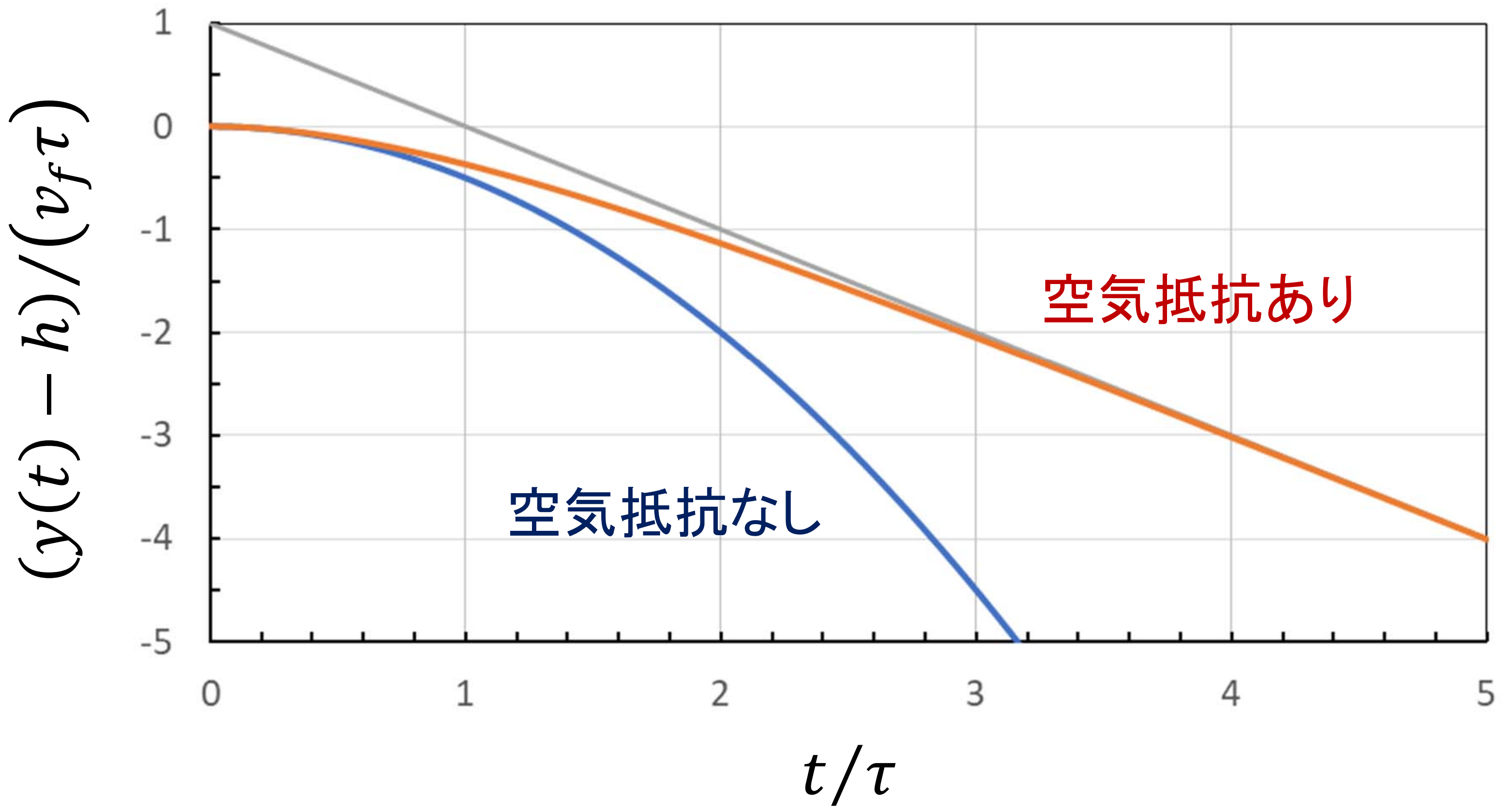
$$y(t) = -v_f t + v_f \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + h$$

となる。

空気抵抗がある場合の自由落下

質点が高さ h から初速度0で落下する場合の位置は

$$y(t) = -v_f t + v_f \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + h$$



空気抵抗がある場合の自由落下

速度の時間積分より求めた位置は

$$y(t) = -v_f t + v_f \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + h$$

ここで、$t \to \infty$ とすると

$$y(t) \cong -v_f t + v_f \tau + h = -v_f t + \left(v_f \tau + h\right)$$

となり、$y(0) = v_f \tau + h$ からの速度 $-v_f$ の等速直線運動に近づく。

空気抵抗がある場合の自由落下

速度の時間積分より求めた位置は

$$y(t) = -v_f t + v_f \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + h$$

ここで、$t \ll \tau$ とすると

$$y(t) = -v_f t + v_f \tau \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 - \cdots \right) \right) + h$$

$$\cong -\frac{1}{2} \frac{v_f}{\tau} t^2 + h = -\frac{1}{2} \frac{mg/\gamma}{m/\gamma} t^2 + h$$

$$= -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

となり、空気抵抗がない場合の結果と一致する。

空気抵抗がある場合の自由落下

質点が高さhから初速度0で落下する場合の運動方程式の解は

速度

$$v(t) = \dot{y}(t) = -v_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

位置

$$\begin{aligned} y(t) &= -v_f t + v_f \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + h \\ &= -\frac{mg}{\gamma}\left(t - \frac{m}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)\right) + h \end{aligned}$$

第3回のまとめ

- 質量 m の質点に力 F が働くときに生じる加速度を a とすると、運動方程式
$$F = ma$$
が成り立つ。
- 空気中を（小さな）速度 v で運動する物体には
$$F = -\gamma v$$
という抵抗力が働く。
- 与えられた初期条件のもとで、運動方程式を時間 t で積分すれば、質点の速度と位置を求めることができる。

空気抵抗（慣性抵抗）

空気中を（大きな）速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する物体には

$$F = -\kappa v^2$$

という抵抗力が働く。抵抗力の向きは、物体の運動と逆向きである。比例定数 κ を（慣性）抵抗係数という。

速度の2乗に比例する抵抗力は媒質（空気）との衝突によるもので、抵抗係数 κ は、物体の断面積を S、媒質の密度を ρ とすると

$$\kappa = \frac{1}{2} C_D \rho S$$

である。ここで、C_D は物体の形状に依存する抗力係数で、物体が球の場合、$C_D \sim 0.5$ 程度の値をとる。