2019年度（R1年度）前期
電気電子工学科

物理学基礎AI
（第15回）
ー惑星の運動ー

2019年7月29日

第15回の要点

- 惑星と太陽の間に万有引力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

　が働いているとすると、運動の法則（運動方程式）からケプラーの法則を導くことができる。

- 万有引力は中心力であるから、惑星の太陽のまわりの角運動量は保存され、面積速度は一定となる。

- エネルギー保存則と角運動量保存則を用いて運動方程式を解くと、惑星の軌道は太陽を1つの焦点とする楕円になる。

ケプラーの法則

惑星の運動の観測から、3つの法則が示された。

第1法則

惑星の軌道は、太陽を1つの焦点とする楕円である。

第2法則

惑星の面積速度は一定である。

※面積速度：惑星と太陽を結ぶ線分が
　単位時間に掃く面積

第3法則

惑星の公転周期の2乗は、
平均軌道半径の3乗に比例する。

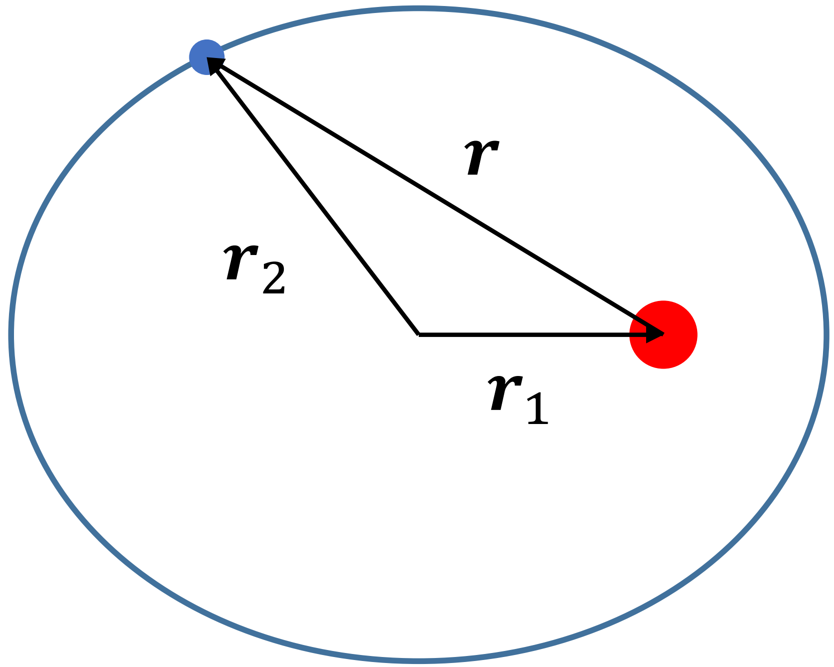
万有引力

惑星と太陽の間に万有引力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = -G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

$$= -G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}$$

が働いているとすると、
運動の法則（運動方程式）
からケプラーの法則を導く
ことができる。



２体問題

万有引力を及ぼし合う惑星と太陽の運動を考える。

惑星の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_p}{dt^2} = -G\frac{Mm}{\left|\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_s\right|^2}\frac{\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_s}{\left|\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_s\right|} = -\boldsymbol{F} \qquad \cdots ①$$

太陽の運動方程式

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_s}{dt^2} = -G\frac{Mm}{\left|\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_p\right|^2}\frac{\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_p}{\left|\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_p\right|} = \boldsymbol{F} \qquad \cdots ②$$

① $\times M -$ ② $\times m$ より

$$Mm\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_p}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{r}_s}{dt^2}\right) = -(M+m)\boldsymbol{F}$$

2体問題

惑星と太陽の運動方程式より

$$Mm\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_p}{dt^2}-\frac{d^2\boldsymbol{r}_s}{dt^2}\right)=-(M+m)\boldsymbol{F}$$

太陽を中心とする相対座標 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_p-\boldsymbol{r}_s$ について

$$\frac{Mm}{M+m}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

換算質量 $\mu=\dfrac{Mm}{M+m}$ を用いると

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

$M\gg m$ のときは、$\mu\cong m$ となる。

角運動量

運動方程式

$$\mu \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

と $\boldsymbol{r}$ との外積をとると、万有引力は中心力だから

$$\boldsymbol{r} \times \mu \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{r} \times G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{0}$$

したがって

$$\boldsymbol{r} \times \mu \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore \mu\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \mu\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \quad \text{（一定）}$$

すなわち、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は保存される。

面積速度

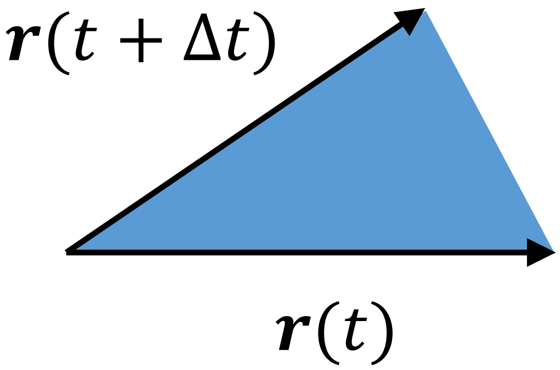
面積速度 $\dot{S}$ は、単位時間あたりに位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が掃く面積であり、

$$\dot{S} = \frac{1}{\Delta t}\frac{|\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}(t+\Delta t)|}{2}$$

$$= \frac{1}{2\Delta t}\left|\boldsymbol{r}(t) \times \left(\boldsymbol{r}(t) + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Delta t\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{r}(t) \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$

$$= \frac{1}{2\mu}|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}| = \frac{|\boldsymbol{L}|}{2\mu}$$



角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存されるとき、面積速度は一定である。

エネルギー積分

運動方程式

$$\mu \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

と $\dot{\boldsymbol{r}}$ の内積をとって時間で積分（エネルギー積分）すると

$$\int_{t_0}^{t} \mu \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} dt = -\int_{t_0}^{t} G \frac{Mm}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu \dot{\boldsymbol{r}}^2\right) dt + \int_{r_0}^{r} G \frac{Mm}{r^2} dr = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{v}^2 - G\frac{Mm}{r} = E \quad （一定）$$

すなわち、エネルギー保存則が成り立つ。

極座標への変換

惑星の軌道面を xy 平面として

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

と極座標で表すと

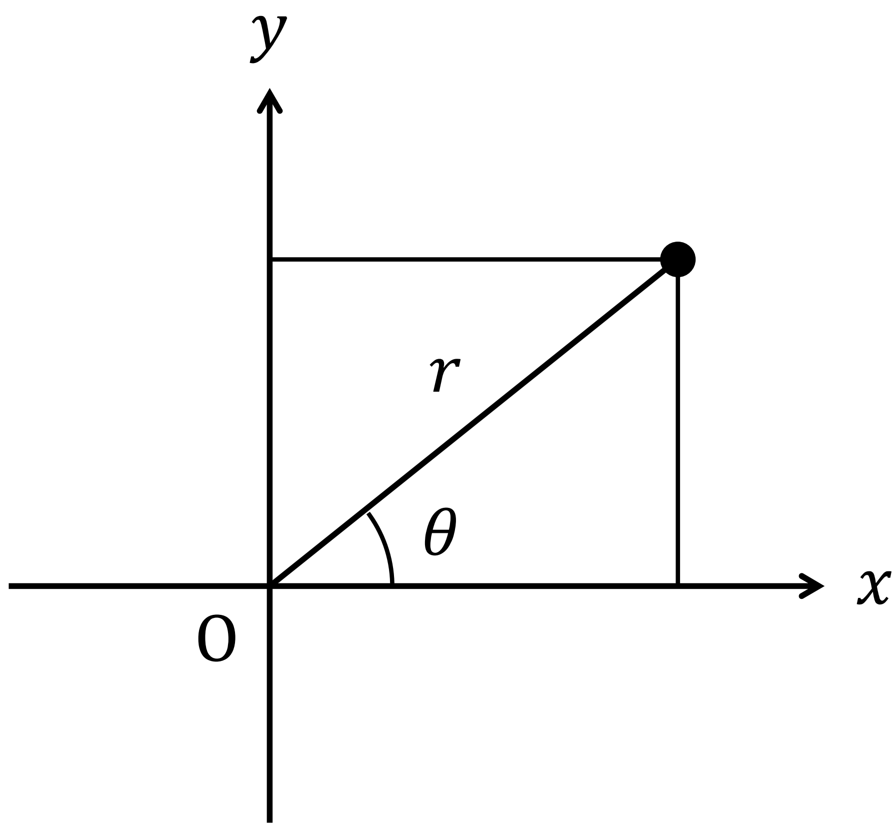
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

であるから

$$\boldsymbol{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| &= x\dot{y} - y\dot{x} \\ &= r\cos\theta\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ &\qquad - r\sin\theta\left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ &= r^2\dot{\theta}\end{aligned}$$



極座標表示

エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}^2 - G\frac{Mm}{r} = E$$

$$\mu\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{L}$$

これを極座標で表すと

$$\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{Mm}{r} = E$$

$$\mu r^2\dot{\theta} = L$$

この2式より $\dot{\theta}$ を消去すると

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = E$$

エネルギーの関係式

エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = E$$

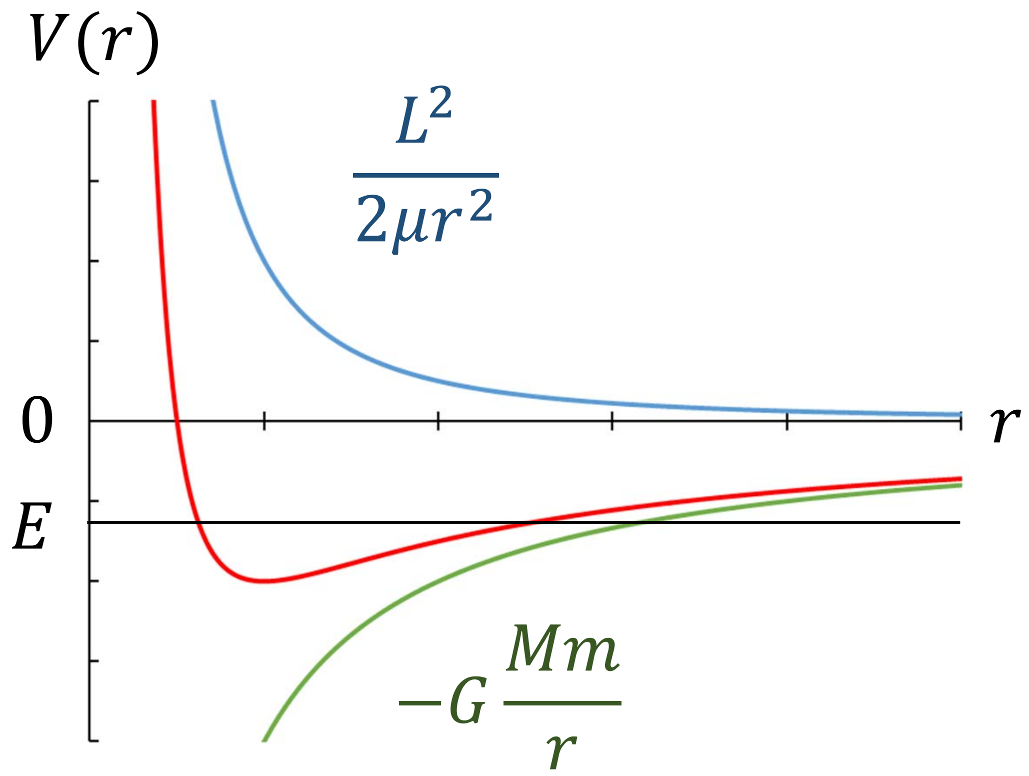
ここで

$$V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r}$$

とすると

$$V(r) = E - \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \leq E$$

であるから、$E < 0$ のとき軌道は有界である。



軌道の方程式

エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = E$$

ここで、惑星の軌道の方程式を求めるために

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

より、時間 t の微分を角度 θ の微分に変換すると

$$\frac{L^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = E$$

軌道の方程式

エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\frac{L^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r} = E$$

さらに、$u = \dfrac{1}{r}$ と変数変換すると $\dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$ だから

$$\frac{L^2}{2\mu}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu}u^2 - GMmu = E$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - u^2 + \frac{2\mu GMm}{L^2}u$$

軌道の方程式

エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2} - u^2 + \frac{2\mu GMm}{L^2}u$$

$$= \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{(\mu GMm)^2}{L^4} - \left(u - \frac{\mu GMm}{L^2}\right)^2$$

ここで、$A^2 = \dfrac{2\mu E}{L^2} + \dfrac{(\mu GMm)^2}{L^4}, B = \dfrac{\mu GMm}{L^2}$ とおくと

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{A^2 - (u - B)^2}$$

軌道の方程式

エネルギー保存則と角運動量保存則より

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{A^2 - (u - B)^2}$$

この解は

$$u = B + A\cos\theta$$

したがって

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{B + A\cos\theta} = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

ただし、$l = \dfrac{1}{B}, \epsilon = \dfrac{A}{B}$

軌道の方程式

運動方程式の解は

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{B + A\cos\theta} = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\theta}$$

ただし、

$$l = \frac{1}{B} = \frac{L^2}{\mu GMm}$$

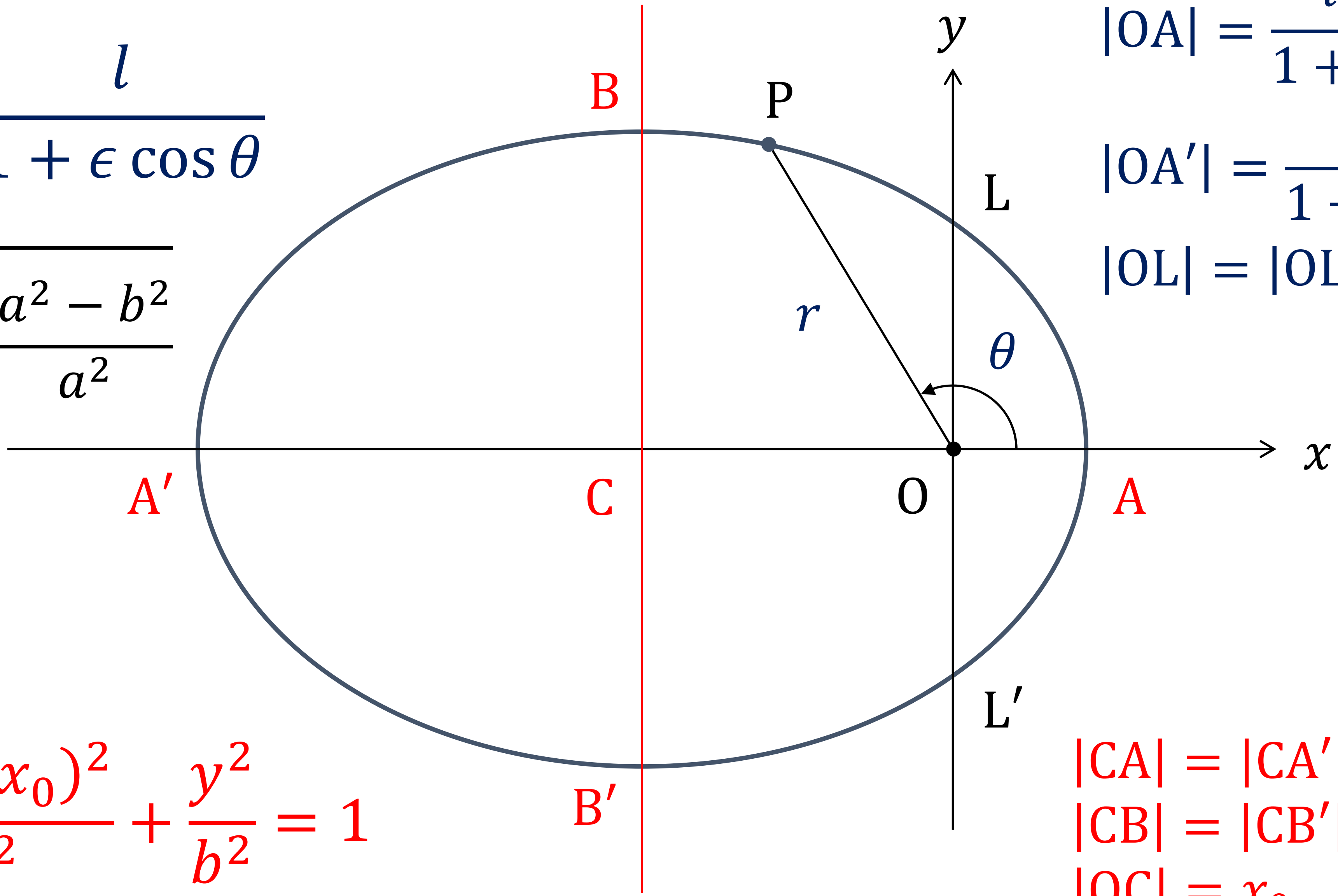
$$\epsilon = \frac{A}{B} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(GMm)^2}}$$

$E < 0$ のとき $\epsilon < 1$ となり、これは半通径 l、離心率 ϵ の楕円の方程式の極座標表示である。

楕円軌道

$$r = \frac{l}{1+\epsilon\cos\theta}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$



$$|\mathrm{OA}| = \frac{l}{1+\epsilon}$$

$$|\mathrm{OA'}| = \frac{l}{1-\epsilon}$$

$$|\mathrm{OL}| = |\mathrm{OL'}| = l$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$|\mathrm{CA}| = |\mathrm{CA'}| = a$$

$$|\mathrm{CB}| = |\mathrm{CB'}| = b$$

$$|\mathrm{OC}| = x_0$$

第15回のまとめ

- 惑星と太陽の間に万有引力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

が働いているとすると、運動の法則（運動方程式）からケプラーの法則を導くことができる。

- 万有引力は中心力であるから、惑星の太陽のまわりの角運動量は保存され、面積速度は一定となる。

- エネルギー保存則と角運動量保存則を用いて運動方程式を解くと、惑星の軌道は太陽を1つの焦点とする楕円になる。