2019年度（R1年度）前期

物理学基礎AI
（第13回）
ー剛体の平面運動ー

2019年7月18日

第13回の要点

- 固定軸のまわりの剛体の回転の運動方程式は、剛体の角運動量を L_z、慣性モーメントを I、角速度をω、力のモーメントを N_z として
$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N_z$$
である。
- 剛体の回転の運動エネルギーは
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$
である。

剛体の運動方程式

重心の運動方程式（運動量の時間変化）

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = M\ddot{\boldsymbol{r}}_G = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F}$$

ここで、M：全質量、$\boldsymbol{r}_G$：重心の位置

角運動量の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{r}_k \times \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{N}_k = \boldsymbol{N}$$

ここで、$\boldsymbol{N}$：外力のモーメント

固定軸のある運動

剛体が固定軸のまわりを回転する場合を考える。
固定軸を z 軸とし、それに垂直に x 軸、y 軸をとる。
剛体の微小要素 k の角運動量の z 成分は

$$L_{kz} = m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k)$$

直交座標を極座標に変換すると

$$x_k = r_k\cos\theta_k\,, \qquad y_k = r_k\sin\theta_k$$

r_k は時間によらず一定で、$\dot{\theta}_k = \omega$ は k によらないから

$$\dot{x}_k = -r_k\omega\sin\theta_k\,, \qquad \dot{y}_k = r_k\omega\cos\theta_k$$

したがって

$$L_{kz} = m_k{r_k}^2\omega(\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k) = m_k{r_k}^2\omega$$

慣性モーメント

剛体の微小要素 k の角運動量の z 成分は

$$L_{kz} = m_k {r_k}^2 \omega$$

剛体の角運動量の z 成分は

$$L_z = \sum_{k=1}^{N} L_{kz} = \sum_{k=1}^{N} m_k {r_k}^2 \omega = I\omega$$

ここで、

$$I = \sum_{k=1}^{N} m_k {r_k}^2$$

を z 軸のまわりの慣性モーメントという。

回転の運動方程式

剛体の角運動量の z 成分は

$$L_z = I\omega = I\frac{d\theta}{dt}$$

剛体の z 軸のまわりの回転の運動方程式は

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{N} N_{kz} = N_z$$

より

$$I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N_z$$

回転の運動エネルギー

剛体の微小要素 k の運動エネルギーは

$$K_k = \frac{1}{2}m_k\left(\dot{x}_k{}^2 + \dot{y}_k{}^2\right) = \frac{1}{2}m_k r_k{}^2\omega^2$$

剛体の回転の運動エネルギーは

$$K = \sum_{k=1}^{N} K_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k r_k{}^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

力のモーメントがする仕事

剛体の回転の運動エネルギーの時間変化は

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = I\omega\frac{d\omega}{dt}$$

運動方程式 $\dot{L} = I\dot{\omega} = N$ より

$$\frac{dK}{dt} = N\omega$$

したがって、力のモーメント N がする仕事は

$$W = \int_{t_0}^{t}\frac{dK}{dt}dt = \int_{t_0}^{t}N\omega\,dt = \int_{t_0}^{t}N\frac{d\theta}{dt}dt = \int_{\theta_0}^{\theta}Nd\theta$$

固定軸（z 軸）のまわりの回転運動

慣性モーメント	$I = \sum_{k}^{N} m_k ({x_k}^2 + {y_k}^2)$
力のモーメント	$N_z = xF_y - yF_x$
角速度	$\omega = \dot{\theta}$
運動方程式	$I\dot{\omega} = N_z$
角運動量	$L_z = I\omega$
運動エネルギー	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$

直線（x 軸）に沿った運動

質量	$M = \sum_{k}^{N} m_k$
力	F_x
速度	$v = \dot{x}$
運動方程式	$M\dot{v} = F_x$
運動量	$p_x = Mv$
運動エネルギー	$K = \frac{1}{2}Mv^2$

滑車

鉛直下向きを x 軸とし、滑車の回転角度を反時計回りに θ とすると、おもりと滑車の運動方程式は

$$M\ddot{x}_2 = Mg - T_2$$

$$m\ddot{x}_1 = mg - T_1$$

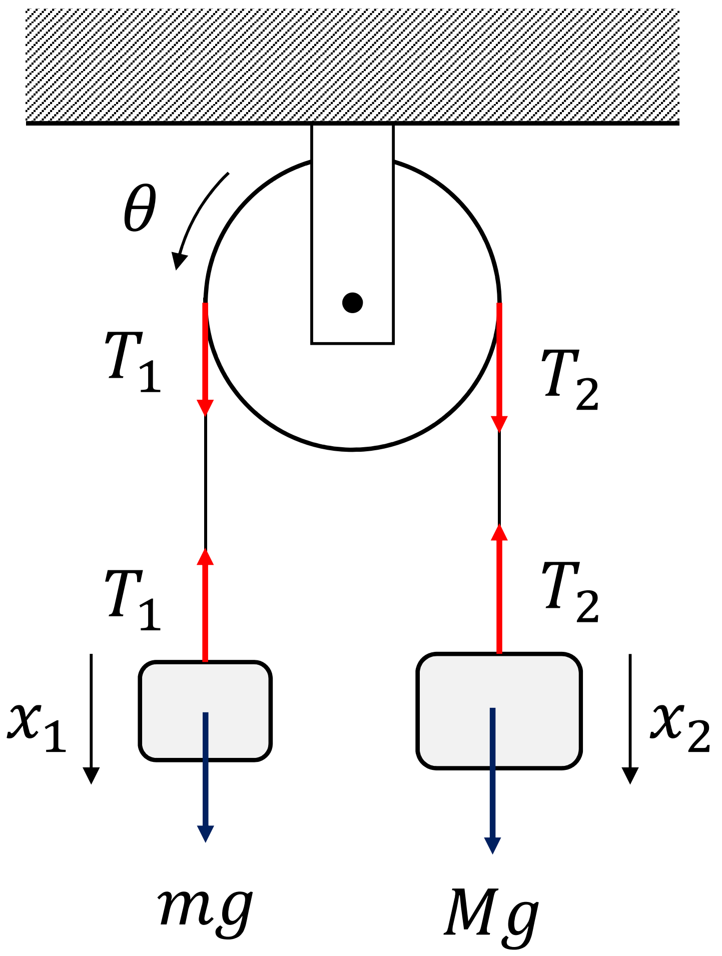
$$I\ddot{\theta} = (T_1 - T_2)R$$

滑車とロープが滑らないことより

$$x_2 = -R\theta, \quad x_1 = R\theta$$

$$\dot{x}_2 = -R\dot{\theta}, \quad \dot{x}_1 = R\dot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{x}_2 = -R\ddot{\theta}, \quad \ddot{x}_1 = R\ddot{\theta} = -\ddot{x}_2$$



滑車

おもりと滑車の運動方程式は

$$M\ddot{x}_2 = Mg - T_2 \qquad \cdots ①$$

$$m\ddot{x}_1 = mg - T_1 \qquad \cdots ②$$

$$I\ddot{\theta} = (T_1 - T_2)R \qquad \cdots ③$$

$(①-②)\times R$ より

$$(M\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1)R = (M-m)gR + (T_1 - T_2)R$$

③を代入して

$$(M\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1)R = (M-m)gR + I\ddot{\theta}$$

滑車

おもりと滑車の運動方程式より

$$(M\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1)R = (M - m)gR + I\ddot{\theta}$$

滑車とロープが滑らない条件

$$\ddot{x}_2 = -R\ddot{\theta}, \quad \ddot{x}_1 = R\ddot{\theta} = -\ddot{x}_2$$

を用いて

$$(M + m)\ddot{x}_2 R = (M - m)gR - \frac{I}{R}\ddot{x}_2$$

$$(M + m)\ddot{x}_2 R^2 = (M - m)gR^2 - I\ddot{x}_2$$

$$\therefore \ddot{x}_2 = \frac{(M - m)R^2}{I + (M + m)R^2}g$$

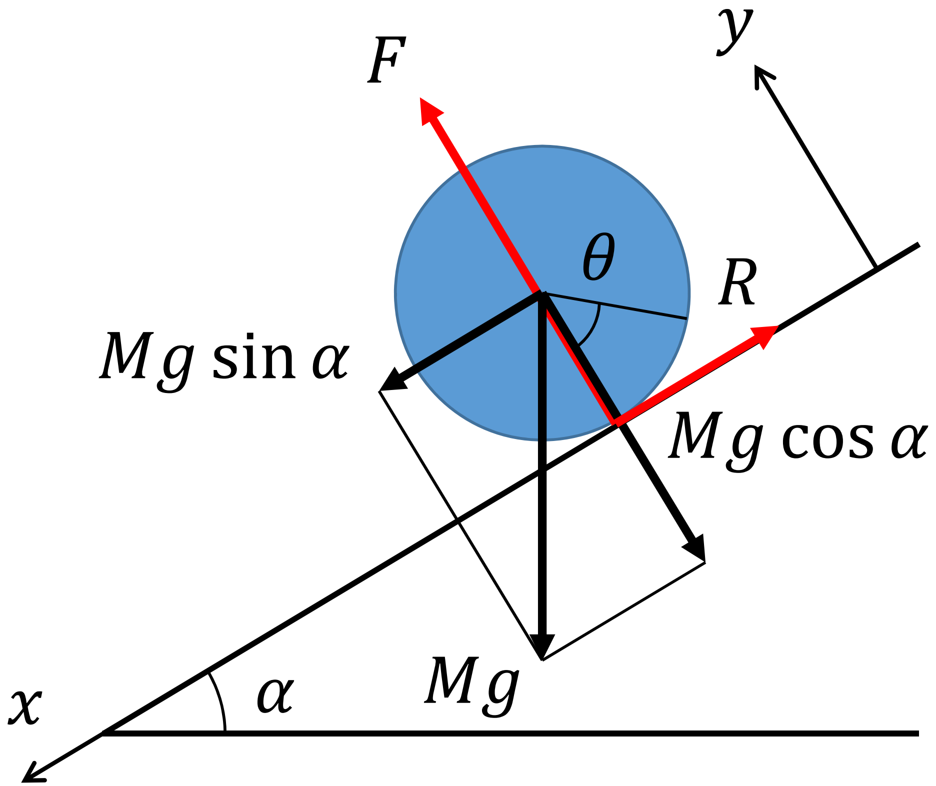
斜面を転がる円柱

半径 a、質量 M、中心軸のまわりの慣性モーメント I の円柱が、水平面となす角 α の斜面を滑らずに転がる場合を考える。

斜面に沿って下向きに x 軸、それに垂直に y 軸をとり、円柱の重心の x 座標を x_G、円柱の回転角を θ とする。

円柱には、
- 重力 Mg
- 斜面からの垂直抗力 F
- 摩擦力 R

が働く。



斜面を転がる円柱

重心の x 方向の運動方程式は

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\alpha - R$$

重心の y 方向の運動方程式は

$$0 = F - Mg\cos\alpha \qquad \therefore F = Mg\cos\alpha$$

円柱の中心軸のまわりの回転の方程式は

$$I\ddot{\theta} = aR$$

円柱が滑らずに転がる場合

$$a\theta = x_G \quad \therefore a\dot{\theta} = \dot{x}_G \quad \therefore a\ddot{\theta} = \ddot{x}_G$$

斜面を転がる円柱

重心の x 方向の運動方程式は

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\alpha - R$$

円柱の中心軸のまわりの回転の方程式は

$$I\ddot{\theta} = aR$$

円柱が滑らずに転がる場合

$$a\ddot{\theta} = \ddot{x}_G$$

以上の式より

$$M\ddot{x}_G = Mg\sin\alpha - \frac{I\ddot{\theta}}{a} = Mg\sin\alpha - \frac{I}{a^2}\ddot{x}_G$$

$$\therefore \ddot{x}_G = \frac{Ma^2}{I + Ma^2} g\sin\alpha$$

第13回のまとめ

- 固定軸のまわりの剛体の回転の運動方程式は、剛体の角運動量を L_z、慣性モーメントを I、角速度をω、力のモーメントを N_z として
$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N_z$$
である。

- 剛体の回転の運動エネルギーは
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$
である。