2019年度（R1年度）前期

物理学基礎AI
（第10回）
―運動量保存則―

2019年6月24日

第10回の要点

- 外力が働いていない質点系では、運動量が保存される。

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2'$$

- 2個の質点の衝突前後の相対速度の比を

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e$$

と表し、e をはね返り係数という。

- 弾性衝突では $e = 1$ であり、衝突前後で運動エネルギーが保存される。

運動量

質量 m の質点が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとき

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

を質点の運動量という。この式を時間 t で微分すると

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

となり、運動方程式の別の表式が得られる。

質点に外力が作用しないとき、$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0}$ となり、運動量は時間によらず一定となる（運動量保存則）。

※運動量の考え方は、複数の質点からなる質点系を扱う際に重要となる。

力積

質点の運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

これを時間 t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$$

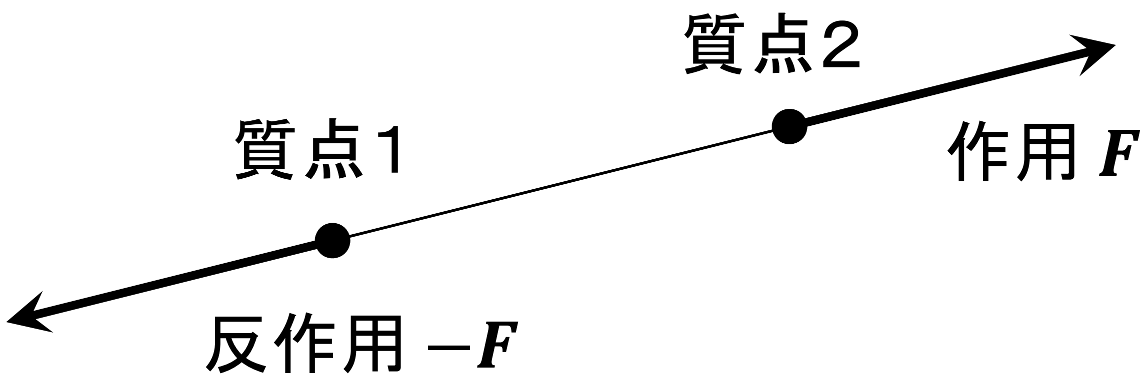
$$\therefore \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta\boldsymbol{p} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$$

右辺の量を力積という。
運動量の増加は、質点に与えられた力積に等しい。

作用と反作用

<u>質点1が質点2に力 $\boldsymbol{F}$ を加えるとき、質点2は質点1に力 $-\boldsymbol{F}$ を加え、これらの力の向きは2つの質点を結ぶ線に平行である。</u>

運動の第3法則は、質点1から質点2に作用が働くとき、質点2から質点1には反作用が働き、作用と反作用は大きさが等しく逆向きであることを示している。



外力と内力

２個の質点からなる系を考える。

$\boldsymbol{F}_k$: 系の外から質点 k に働く外力

$\boldsymbol{F}_{kj}$: 系の中の質点 j が質点 k に及ぼす内力

とすると、質点1の運動方程式は

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12}$$

質点2の運動方程式は

$$m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21}$$

２個の質点について和をとると

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) + (\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21})$$

作用・反作用の法則

２個の質点の運動方程式より

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) + (\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21})$$

運動の第3法則（作用・反作用の法則）より、内力については $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ であるから

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

運動量保存則

２個の質点からなる系の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

運動量 $\boldsymbol{p}_k = m_k\boldsymbol{v}_k$ を用いて表すと

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

外力が働いていない場合は

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{0}$$

すなわち、運動量の和は一定である（運動量保存則）。

衝突

直線上のみを運動する質点1（質量 m_1）と質点2（質量 m_2）が衝突する場合を考える。

v_1 : 質点1の衝突前の速度
v_2 : 質点2の衝突前の速度
$v_1{}'$: 質点1の衝突後の速度
$v_2{}'$: 質点2の衝突後の速度

とすると、衝突の前後で運動量が保存されることから

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}'$$

が成り立つ。

はね返り係数

２個の質点の衝突前後の相対速度の比を

$$\frac{v_1{}' - v_2{}'}{v_1 - v_2} = -e$$

と表し、e をはね返り係数という。

e の値の範囲は $0 \leq e \leq 1$ であり、

$e = 1$ の場合を弾性衝突

$e < 1$ の場合を非弾性衝突

$e = 0$ の場合を完全非弾性衝突

という。

弾性衝突

はね返り係数が $e = 1$ の場合を考える。

運動量の保存則: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 {v_1}' + m_2 {v_2}'$

衝突前後の相対速度の関係: $\dfrac{{v_1}' - {v_2}'}{v_1 - v_2} = -1$

より、${v_2}'$ を消去すると

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 {v_1}' + m_2\left({v_1}' + (v_1 - v_2)\right)$$

$$\therefore {v_1}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

同様に、${v_1}'$ を消去すると

$$ {v_2}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

弾性衝突

はね返り係数が $e = 1$ の場合、衝突後の運動エネルギー K' は

$$
\begin{aligned}
K' &= \frac{1}{2}m_1{v_1}'^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}'^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_2\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2
\end{aligned}
$$

となり、衝突前の運動エネルギーに等しい。

衝突後の速度

非弾性衝突を含む一般の場合を考える。

運動量の保存則: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 {v_1}' + m_2 {v_2}'$

衝突前後の相対速度の関係: $\dfrac{{v_1}' - {v_2}'}{v_1 - v_2} = -e$

より、${v_2}'$ を消去すると

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 {v_1}' + m_2\left({v_1}' + e(v_1 - v_2)\right)$$

$$\therefore {v_1}' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - e\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

同様に、${v_1}'$ を消去すると

$$ {v_2}' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + e\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

衝突後の運動エネルギー

衝突後の運動エネルギー K' は

$$K' = \frac{1}{2}m_1{v_1}'^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}'^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - e\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} + e\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}e^2(v_1 - v_2)^2$$

衝突後の運動エネルギー

衝突後の運動エネルギー K' は

$$K' = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} e^2 (v_1 - v_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} M {v_G}^2 + \frac{1}{2} \mu e^2 v^2$$

ここで、質量の和： $M = m_1 + m_2$

重心速度： $v_G = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

換算質量： $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

相対速度： $v = v_1 - v_2$

重心の運動

2個の質点の重心の位置は

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

これを時間 t で微分すると

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{\boldsymbol{r}}_G = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

外力が働いていないとき、運動量の和は一定だから、重心の速度は一定である。すなわち、重心は等速直線運動をする。

衝突の前後で、重心の速度は変化しない。

相対運動

外力が働いていない2個の質点の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

$$\therefore m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = (m_1 + m_2)\boldsymbol{F}_{12}$$

ここで、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \quad \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ とおくと

$$\mu \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12}$$

と1つの運動方程式になる。μ を換算質量という。

第10回のまとめ

- 外力が働いていない質点系では、運動量が保存される。

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1{}' + m_2\boldsymbol{v}_2{}'$$

- 2個の質点の衝突前後の相対速度の比を

$$\frac{v_1{}' - v_2{}'}{v_1 - v_2} = -e$$

と表し、e をはね返り係数という。

- 弾性衝突では $e = 1$ であり、衝突前後で運動エネルギーが保存される。