2019年度（H31/R1年度）前期

物理学基礎AI
（第1回）
ー運動の表し方ー

2019年4月8日

第1回の要点

- 質点の運動は、位置 x の時間変化で表される。
- 速度 v は、位置の時間微分である。

  $$v(t) = \dot{x}(t)$$

  逆に、速度を時間で積分すれば、位置が求められる。

  $$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt$$

- 加速度 a は、速度の時間微分である。

  $$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

  逆に、加速度を時間で積分すれば、速度が求められる。

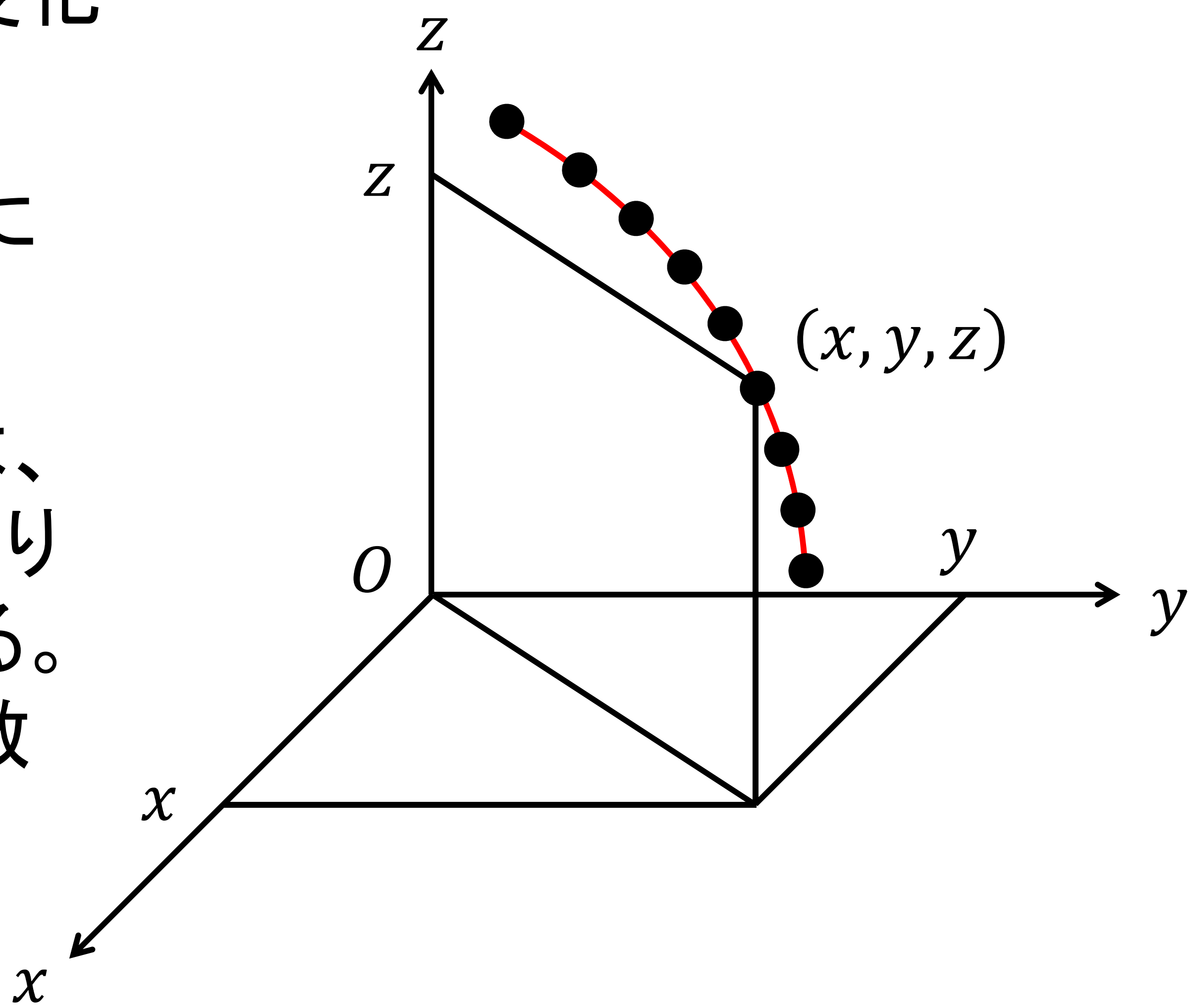
  $$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$

位置と座標

物体の大きさを無視するとき、質点という。質点の運動は、その位置の時間変化のみで表される。

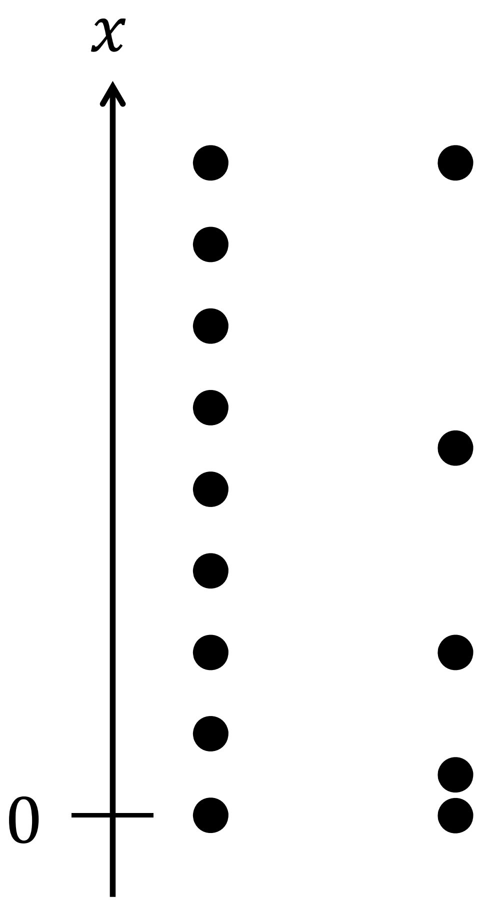
質点の位置を表すのに座標系を用いる。

3次元直交座標系では、3つの座標 x, y, z により質点の位置が表される。x, y, z は時間 t の関数である。



直線運動（1次元運動）

直線運動をする質点の位置は1つの座標 x で表され、
x は時間 t の関数である。



等速運動（速度 v_0）

$$x(t) = v_0 t$$

等加速度運動（加速度 a_0）

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

平均の速さ

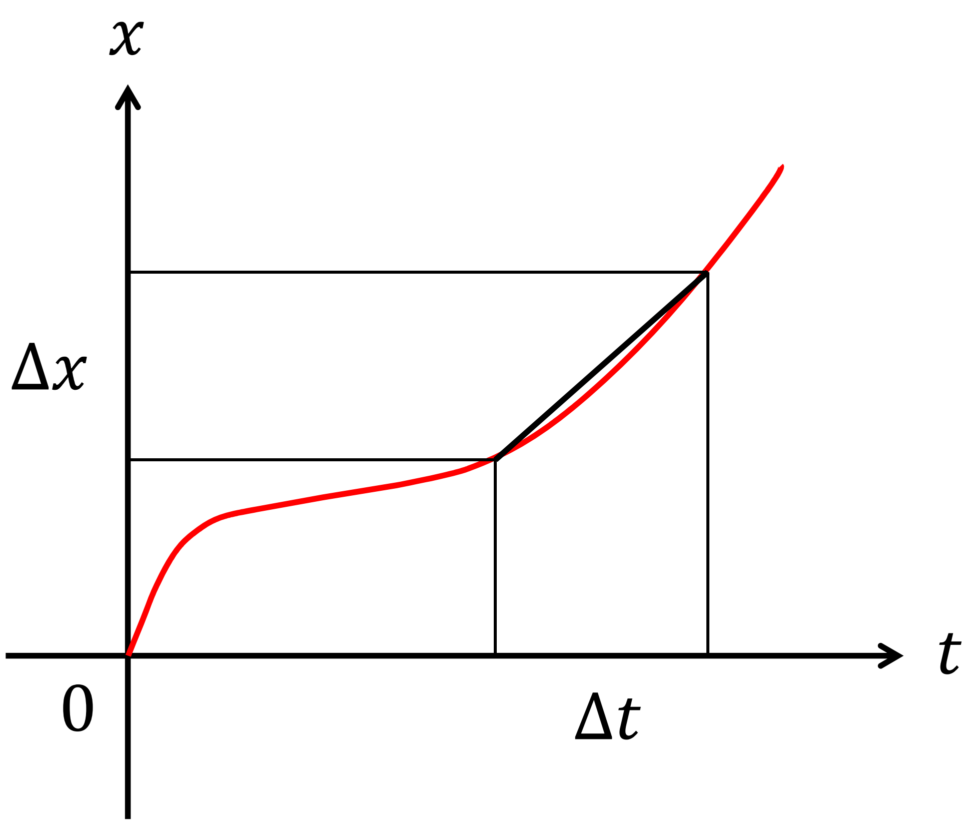
時刻 t における質点の位置を $x(t)$ とし、時間 Δt の間に位置が Δx だけ変化するとき、平均の速さ $\bar{v}$ は

$$\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

で求められる。

平均の速さは、単位時間あたりの位置の変化（移動距離）である。



速度

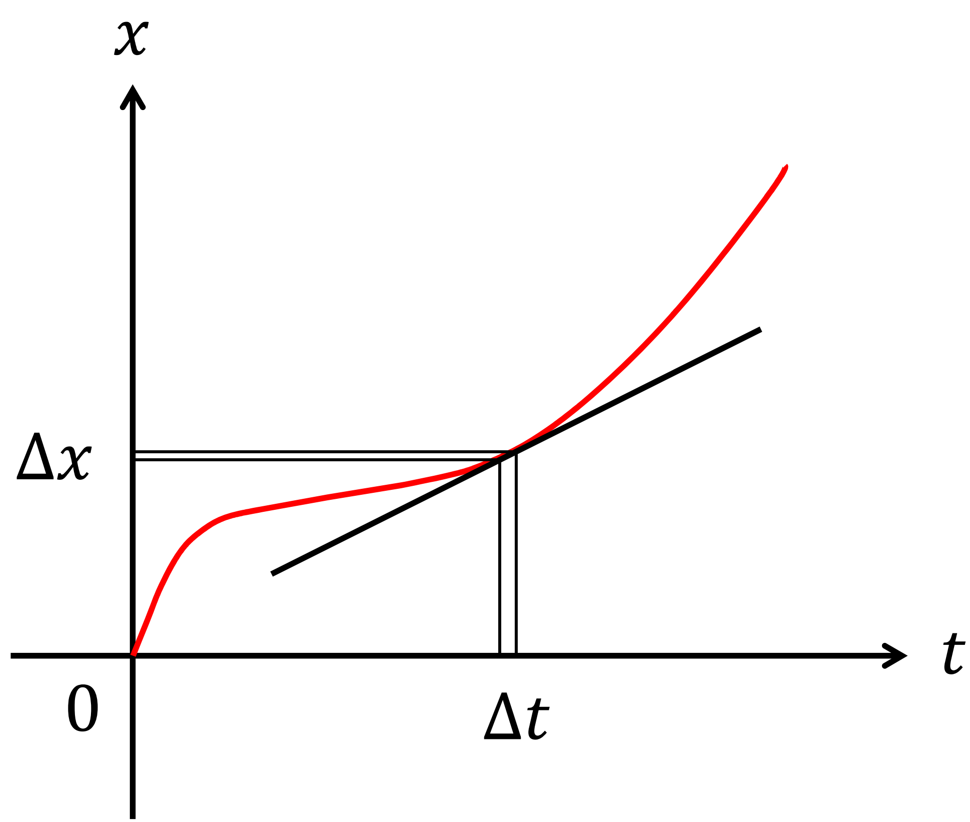
速さが時間とともに変化するとき、時刻 t における瞬間の速さ v は、時間 Δt を0に近づけた極限値であり、

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

で求められる。

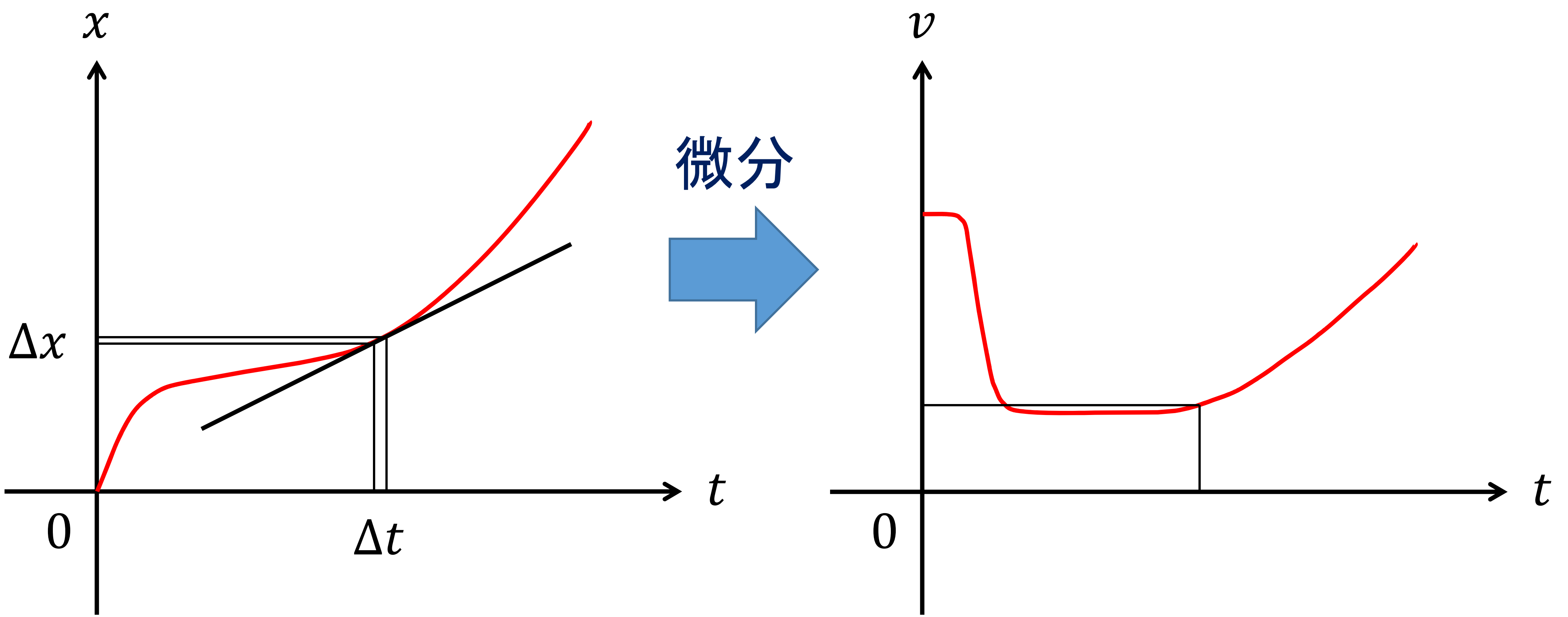
速さの向き（符号の正負）も含めて考えたものを速度という。速度 v は、位置 $x(t)$ の時間微分 $\dot{x}$ である。



速度と位置（微分）

速度 v は、位置 $x(t)$ の時間微分 $\dot{x}$ である。

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$



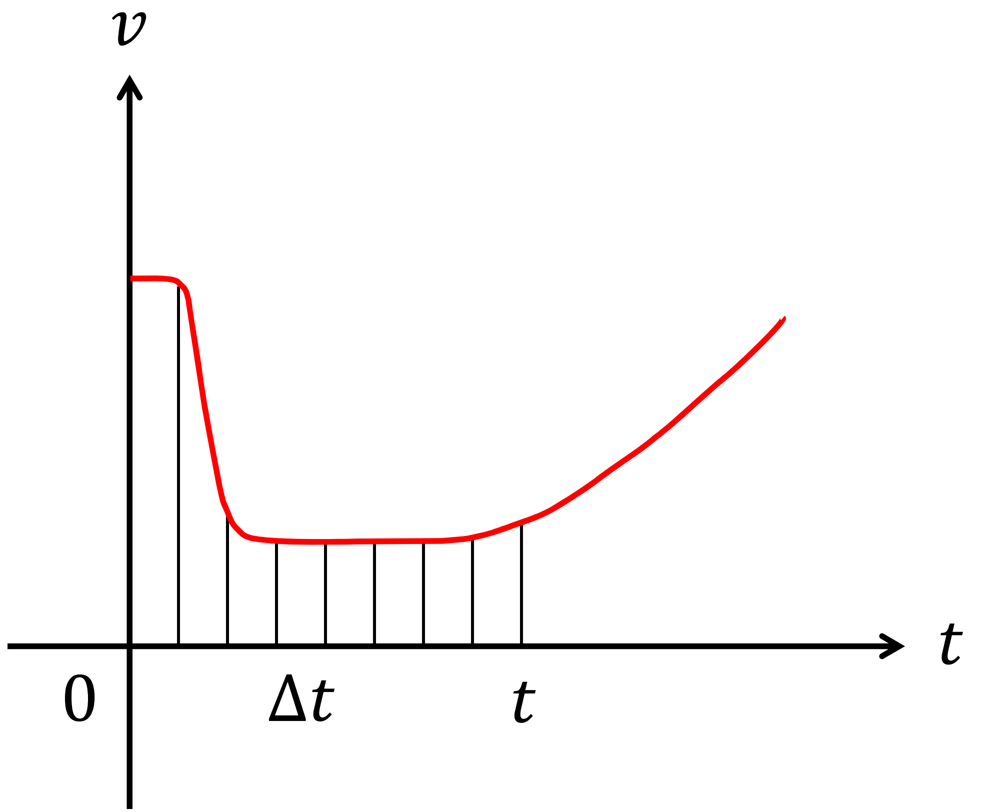
速度と位置

速度 v から位置 $x(t)$ を求めるには、時刻 $t=0$ から時刻 t までを n 個の区間 Δt に分割し、その間の移動距離 $\Delta x_i = \bar{v}_i \Delta t$ を足し合わせればよい。時刻 $t=0$ での位置を $x(0)=x_0$ とすると

$$x(t) = x_0 + \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n\right)$$

$$= x_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$= x_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \Delta t_i$$



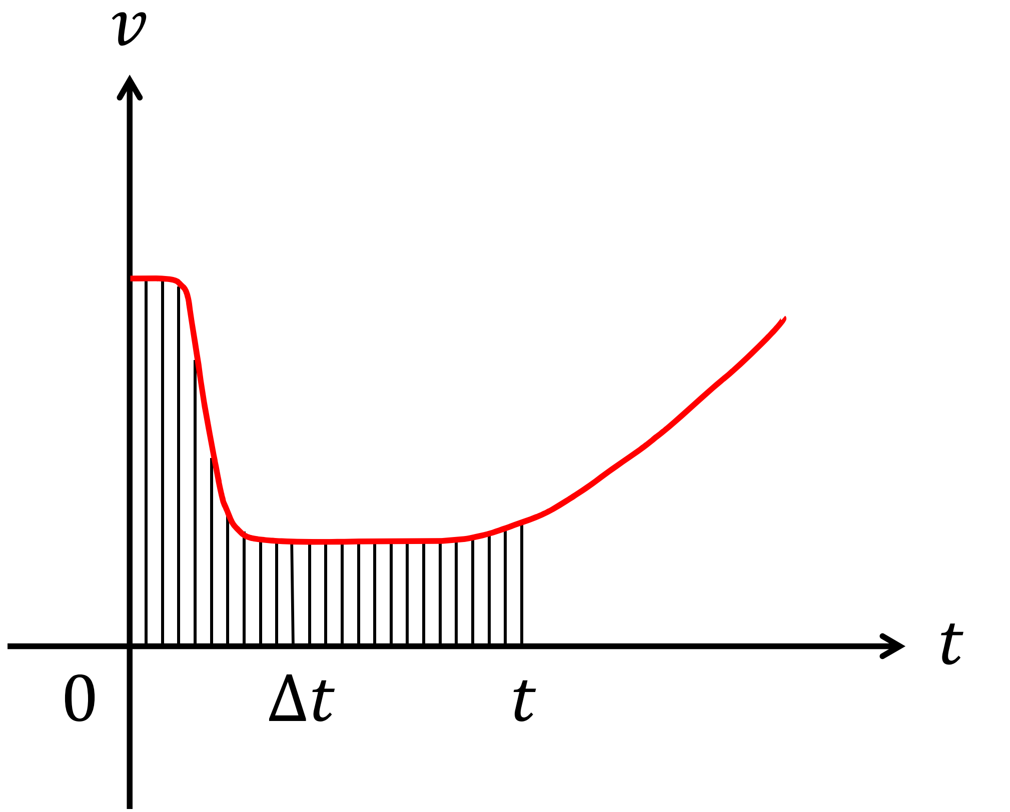
速度と位置

速度 v から位置 $x(t)$ をより正確に求めるために、分割数 n を十分大きくして($n \to \infty$)、$\Delta t \to 0$ とすると

$$x(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t$$

$$= x_0 + \int_0^t v dt$$

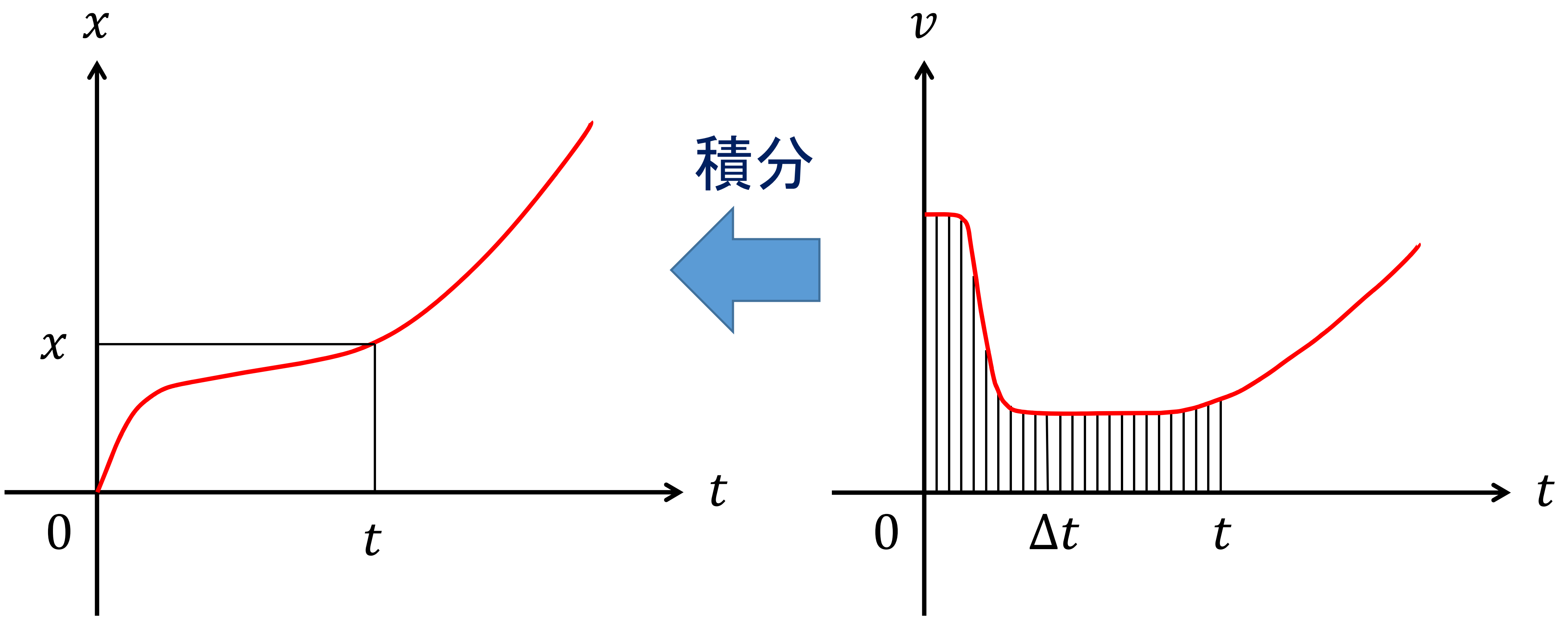
となる。位置 $x(t)$ は、
速度 v の時間積分である。



速度と位置（積分）

位置 $x(t)$ は、速度 v の時間積分である。

$$x(t) = \int_0^t v dt + x_0 = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt + x_0$$



加速度

質点の速度 v が時間とともに変わるとき、速度の時間変化率を加速度という。加速度 a は

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$$

で求められる。

加速度 $a(t)$ は、速度 $v(t)$ の時間微分 $\dot{v}$ であり、
位置 $x(t)$ の時間についての2階微分 $\ddot{x}$ である。

加速度と速度

加速度 $a(t)$ は、速度 $v(t)$ の時間微分 $\dot{v}$ である。

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

逆に、加速度 $a(t)$ を時間で積分すれば、速度 $v(t)$ が求められる。

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt + v_0 = \int_0^t \frac{dv}{dt}dt + v_0$$

ここで、$v_0 = v(0)$ は時刻 $t = 0$ における速度である。

等速直線運動

質点が時間によらず一定の速度で直線上を運動するとき、等速直線運動という。

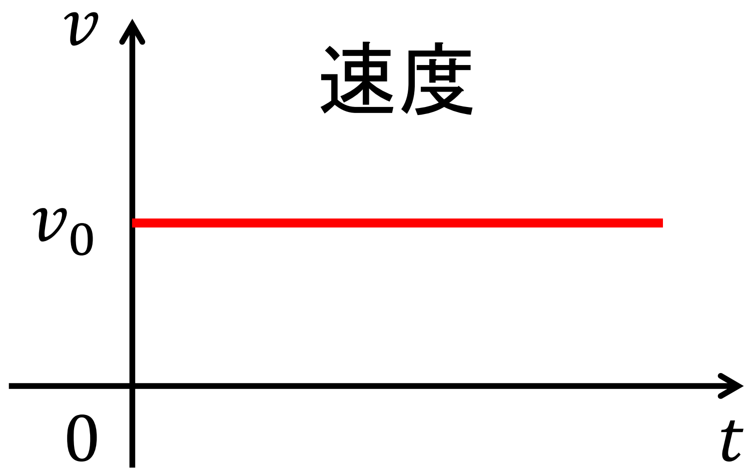
x 軸上の等速直線運動では

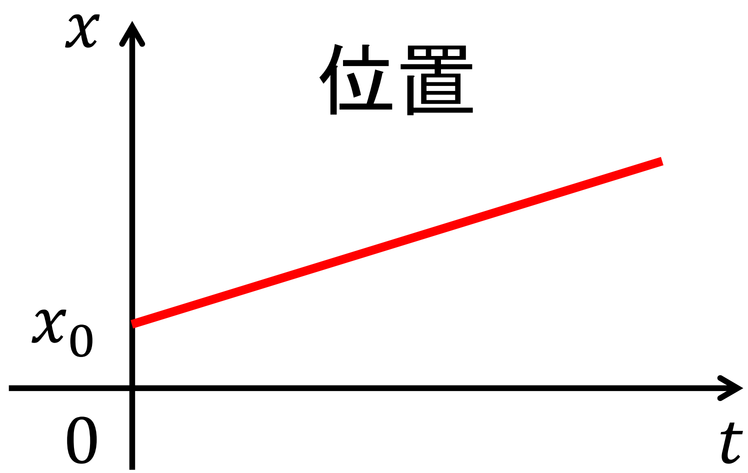
$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \quad （一定）$$

である。$t = 0$ で $x = x_0$ として、これを積分すると、位置は

$$x = \int_0^t v_0 dt + x_0 = v_0 t + x_0$$

となる。





1次元の等加速度運動

直線上（x 軸上）の運動で加速度が一定のとき

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a_0 \quad \text{（一定）}$$

となる。$t = 0$ で $v = v_0$ として積分すると速度は

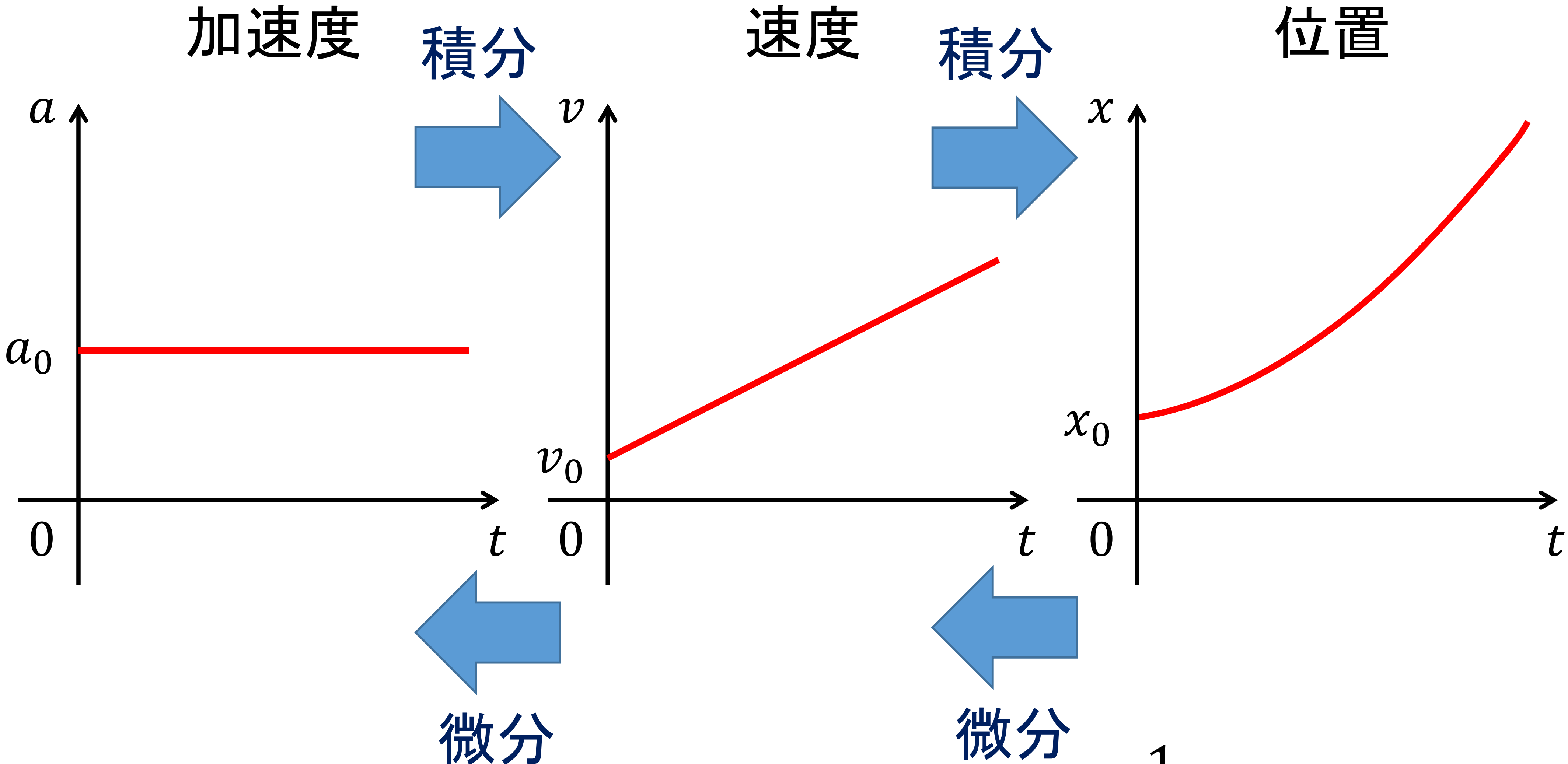
$$v = \int_0^t a_0 dt + v_0 = a_0 \int_0^t dt + v_0 = a_0 t + v_0$$

となる。さらに $t = 0$ で $x = x_0$ として積分すると位置は

$$x = \int_0^t v dt + x_0 = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

となる。

1次元の等加速度運動



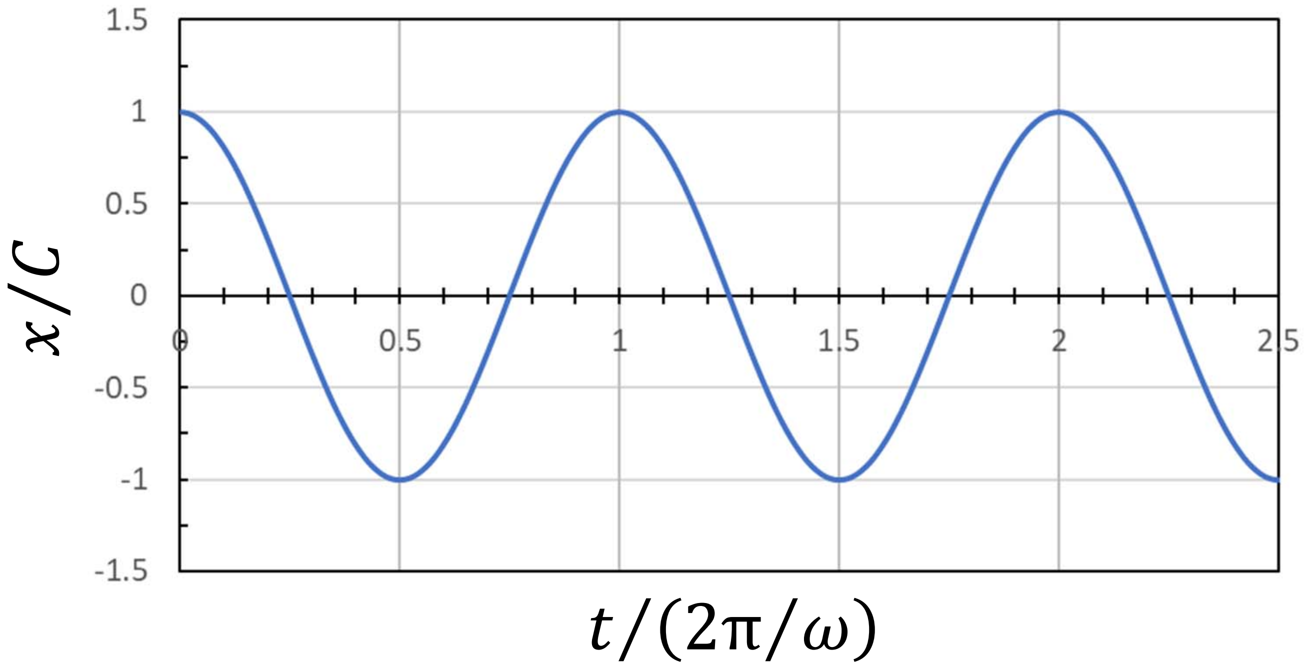
$$a = a_0 \qquad v = a_0 t + v_0 \qquad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

単振動

質点の位置の時間変化 $x(t)$ が、C, ω を定数として

$$x(t) = C\cos\omega t$$

で表される運動を単振動という。（本授業 第4回）



単振動

質点の位置の時間変化 $x(t)$ が、C, ω を定数として

$$x(t) = C\cos\omega t$$

で表される運動を単振動という。（本授業 第4回）

これを時間 t で微分すると速度は

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -C\omega\sin\omega t$$

となる。さらにこれを時間 t で微分すると加速度は

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = -C\omega^2\cos\omega t$$

となる。

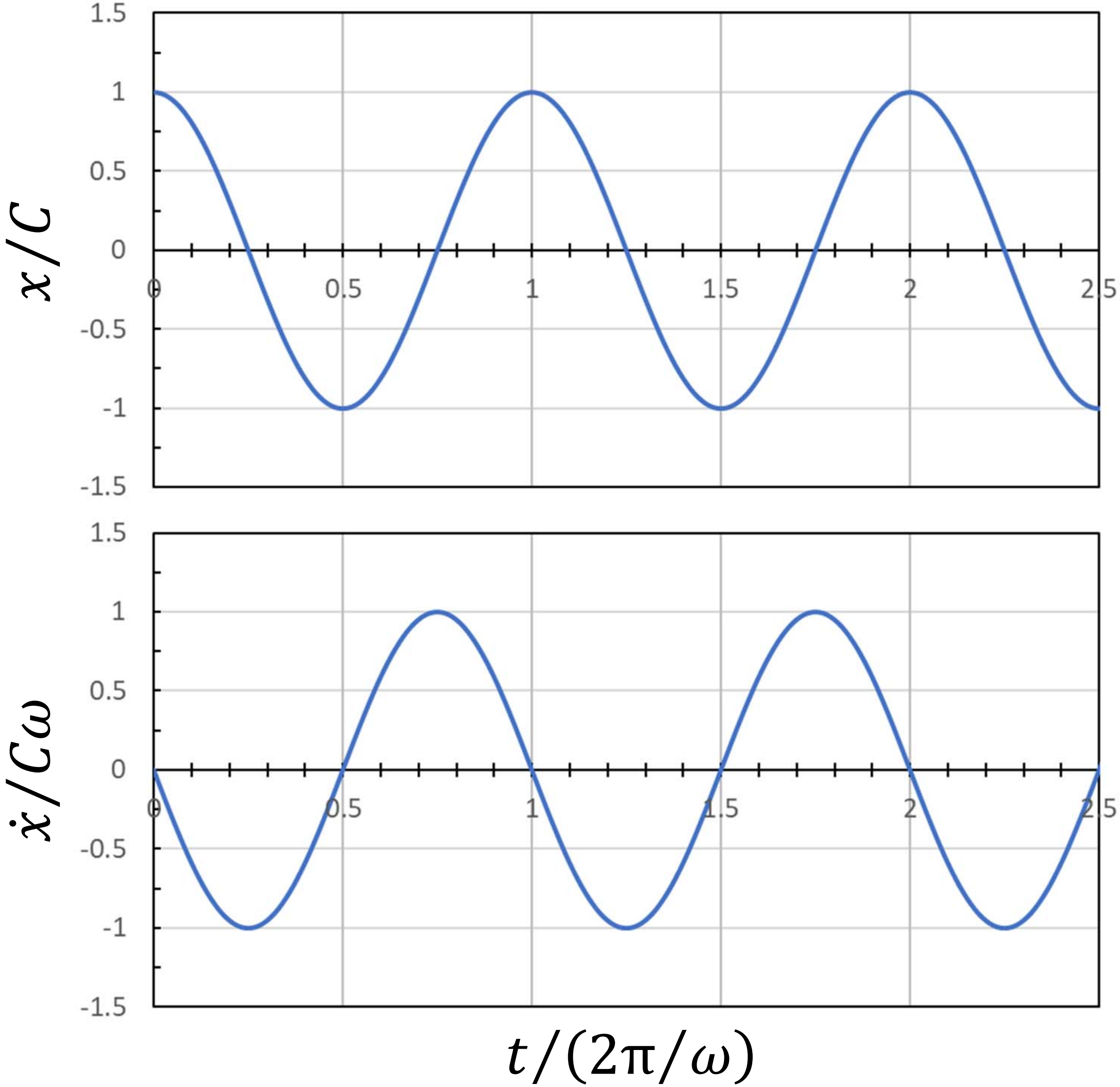
1次元の振動

位置

$$x(t) = C\cos\omega t$$

速度

$$v(t) = -C\omega\sin\omega t$$



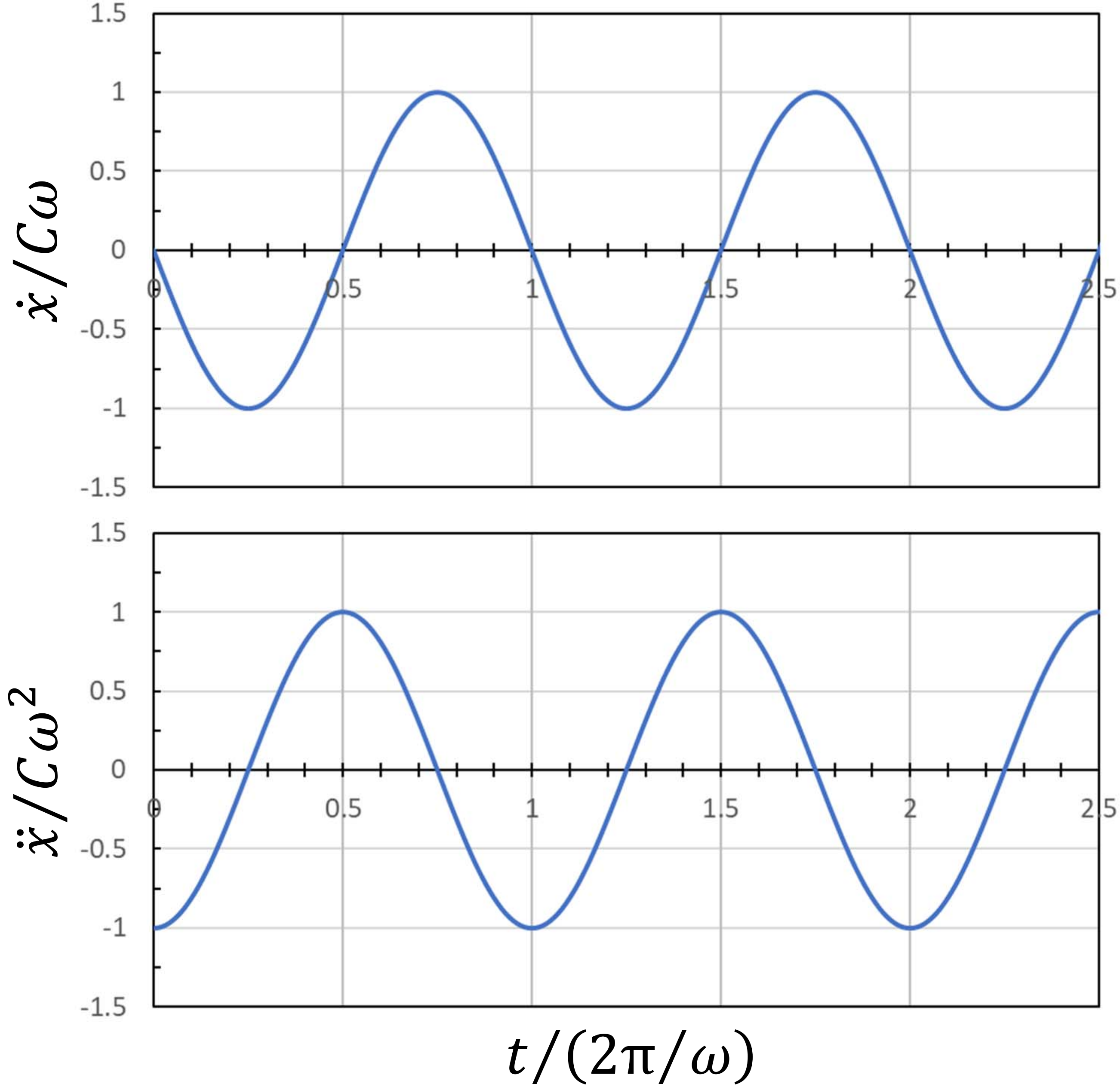
1次元の振動

速度

$$v(t) = -C\omega \sin \omega t$$

加速度

$$a(t) = -C\omega^2 \cos \omega t$$



第1回のまとめ

- 質点の運動は、位置 x の時間変化で表される。
- 速度 v は、位置の時間微分である。

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

逆に、速度を時間で積分すれば、位置が求められる。

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt$$

- 加速度 a は、速度の時間微分である。

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

逆に、加速度を時間で積分すれば、速度が求められる。

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$