

2019年度(R1年度)前期
物理学基礎AI

有効数字

2019年5月6日

有効数字

物理量の数値は、一般に誤差を含んでいる。その数値がどの桁まで信頼できるかを有効数字を用いて表す。

(例)

物差しで長さを測るとき、できる限り正確な値が必要な場合には、目盛の1/10 までを目測で読む。

目盛が 1 mm 間隔ならば、0.1 mm までの桁を有効数字として、測定値を 75.3 mm や 75.0 mm のように表す。

ここで、75.0 mm は「74.9 mm でも 75.1 mm でもなく、75.0 mm である」ということを表している。

これに対して 75 mm は「74 mm でも 76 mm でもなく、75 mm である」という意味であり、75.0 mm に比べて測定精度が1桁悪いことになる。

有効数字の指数表記

大きい数値の場合には、**指数表記**を用いて有効数字を表す。

(例)

長さを 1500 m と表記すると、1 m の桁まで信頼できるという意味になる。

信頼できるのが 10 m の桁までの場合は 1.50×10^3 m と表す。
または、単位を km にして 1.50 km と表す。

このとき、有効数字は3桁である(または、有効数字は小数第2位までである)という。

長さ 15 mm を 0.015 m と表しても有効数字は2桁のままである
(0.0 は有効数字には含めない)。

計算結果の有効数字

数値計算の結果についても、有効数字を考慮する必要がある。

(例)

2辺の長さが 6.72 m, 5.18 m の長方形の面積を求める場合、
計算上は $6.72 \text{ m} \times 5.18 \text{ m} = 34.8096 \text{ m}^2$ となるが、この値は
6桁目まで正確とは言えない。

なぜなら、6.72 m, 5.18 m という値には、それぞれ $\pm 0.01 \text{ m}$ 程度の
誤差が含まれているから

最小では $6.71 \text{ m} \times 5.17 \text{ m} = 34.6907 \text{ m}^2$

最大では $6.73 \text{ m} \times 5.19 \text{ m} = 34.9287 \text{ m}^2$

となる可能性があるからである。

そこで、計算結果は有効数字を3桁として

$6.72 \text{ m} \times 5.18 \text{ m} = 34.8096 \text{ m}^2 = 34.8 \text{ m}^2$ とする。

積と商の有効数字

有効数字 n 桁どうしの積と商は、有効数字を n 桁とする。
有効数字が異なるときは、小さい方をとる。

(例)

- ・ 2辺の長さが 9.08 cm, 5.53 cm の長方形の面積は、有効数字 3桁で $9.08 \text{ cm} \times 5.53 \text{ cm} = 50.2124 \text{ cm}^2 = 50.2 \text{ cm}^2$ とする。
- ・ 2辺の長さが 9.08 cm, 5.5 cm の長方形の面積は、有効数字 2桁で $9.08 \text{ cm} \times 5.5 \text{ cm} = 49.94 \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^2$ とする。
- ・ 距離 27.4 m を 3.85 s で移動したときの平均の速さは、有効数字 3桁で $27.4 \text{ m} \div 3.85 \text{ s} = 7.11688 \dots \text{ m/s} = 7.11 \text{ m/s}$ とする。
- ・ 距離 27.4 m を 3.9 s で移動したときの平均の速さは、有効数字 2桁で $27.4 \text{ m} \div 3.9 \text{ s} = 7.0256 \dots \text{ m/s} = 7.0 \text{ m/s}$ とする。

和と差の有効数字

和と差の場合は、桁ではなく位で有効数字を合わせる。
小数第 n 位までどうしの和と差は、小数第 n 位までとする。有効数字が異なるときは、小さい方をとる。

(例)

- ・長さ 6.14 m と 5.18 m の和は、有効数字は小数第2位までで $6.14 \text{ m} + 5.18 \text{ m} = 11.32 \text{ m}$ とする。
- ・長さ 6.14 m と 5.2 m の和は、有効数字は小数第1位までで $6.14 \text{ m} + 5.2 \text{ m} = 6.1 \text{ m} + 5.2 \text{ m} = 11.3 \text{ m}$ とする。
- ・長さ 6.14 m と 5.18 m の差は、有効数字は小数第2位までで $6.14 \text{ m} - 5.18 \text{ m} = 0.96 \text{ m}$ とする。
- ・長さ 6.14 m と 5.2 m の差は、有効数字は小数第1位までで $6.14 \text{ m} - 5.2 \text{ m} = 6.1 \text{ m} - 5.2 \text{ m} = 0.9 \text{ m}$ とする。

数学的な数値の有効数字

数学的に導かれる整数値や分数値は、厳密にその値をとるから、数値計算の際に有効数字は無限桁として扱ってよい。

(例)

- ・半径 r の円の円周の長さ $l = 2\pi r$ の 2 は $2.000000 \dots$
- ・加速度 a の等加速度運動における時間 t の間の移動距離

$$x = \frac{1}{2}at^2 \text{ の } \frac{1}{2} \text{ は } 0.5000000 \dots$$

無理数や物理定数の有効数字

無理数の数値(円周率など)や物理定数(重力加速度など)は、他の物理量の数値に合わせた有効数字で計算する。あるいは、十分大きな桁数をとって計算し、最後に他の物理量の数値に合わせて有効数字を決める。

(例)

- ・半径 $r = 25.403 \text{ m}$ の円の円周の長さ $l = 2\pi r$
 $2 \times 3.1416 \times 25.403 \text{ m} = 159.6121296 \text{ m} = 159.61 \text{ m}$
 $2 \times 3.14159265 \times 25.403 \text{ m} = 159.6117... \text{ m} = 159.61 \text{ m}$
- ・半径 $r = 25.4 \text{ m}$ の円の円周の長さ
 $2 \times 3.14 \times 25.4 \text{ m} = 159.512 \text{ m} = 160 \text{ m}$
 $2 \times 3.14159265 \times 25.4 \text{ m} = 159.5929 ... \text{ m} = 160 \text{ m}$

途中計算の有効数字

計算の途中で四捨五入をすると、最終的な答の数値が食い違うことがある。それを避けるには、文字式で計算して、最後に数値を代入するのがよい。

(例)

高さ $h = 25 \text{ m}$ からの自由落下で地面に落ちるまでの時間を

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 25 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 2.258 \dots \text{ s} = 2.3 \text{ s} \text{ と求めた値から}$$

そのときの速度を $v(T) = gT = 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2.3 \text{ s} = 22.54 \text{ m/s}$
 $= 23 \text{ m/s}$ と計算するよりも

$$v(T) = gT = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 25 \text{ m}}$$
$$= 22.1359 \dots \text{ m/s} = 22 \text{ m/s} \text{ と計算する方がよい。}$$